1 ESPAÇO, REFERENCIAIS E AS COORDENADAS CARTESIANAS

Gil da Costa Marques

Clique nos itens do sumário para acessar rapidamente partes específicas do texto e clique no rodapé de qualquer página para voltar a este sumário.

O material desta disciplina foi produzido pelo Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada (CEPA) do Instituto de Física da Universidade de São Paulo (USP) para o projeto Licenciatura em Ciências (USP/Univesp).

Créditos

Coordenação de Produção: Beatriz Borges Casaro.

Revisão de Texto: Marcia Azevedo Coelho, Marina Keiko Tokumaru e Paulo Barroso.

Revisão Técnica: Paulo Yamamura e Renata Bressane.

Design Instrucional: Fernanda Diniz Junqueira Franco, Gezilda Balbino Pereira, Juliana Moraes Marques Giordano, Michelle Carvalho, Roberta Takahashi Soledade e Vani Kenski.

Projeto Gráfico e Diagramação: Daniella de Romero Pecora, Leandro de Oliveira, Priscila Pesce Lopes de Oliveira e Rafael de Queiroz Oliveira.

Ilustração: Alexandre Rocha, Aline Antunes, Benson Chin, Camila Torrano, Celso Roberto Lourenço, João Costa, Lidia Yoshino, Mauricio Rheinlander Klein e Thiago A. M. S.

Fotografia: Jairo Gonçalves.

1.1 Introdução

A Mecânica é a área do conhecimento que estuda os movimentos dos corpos. É comum fazermos referência ao movimento dos objetos como sendo movimentos que ocorrem no espaço. De acordo com essa definição, a mecânica requer, ao estudar os movimentos, a introdução de dois conceitos ditos primitivos ou fundamentais:

O conceito de espaço	O conceito de tempo

Trata-se de conceitos que não podem ser derivados ou entendidos a partir de outros, pois todas as ciências partem de conceitos primitivos. Assim, ainda hoje buscamos entender tais conceitos. Em particular, esses temas são objeto de análise das ciências naturais, notadamente a física, como também das ciências humanas tais como a psicologia e a filosofia.

Presentemente abordaremos, de forma rápida, esses conceitos fundamentais para a mecânica. Enfatizaremos o uso de um referencial (ou sistema de referência) no espaço quando do estudo do movimento dos corpos.

Estudaremos ainda a determinação de um ponto no espaço por meio de um **sistema de referência**, pois, somente a partir da escolha de um referencial, podemos introduzir as coordenadas de um ponto. E este é um aspecto essencial no que diz respeito à localização de um corpo no espaço físico.

1.2 O Espaço físico

O espaço pode ser pensado como o palco no qual os fenômenos físicos ocorrem. Nós nos referimos a ele como sendo o "espaço físico". Espaço é um conceito fundamental e ele é caracterizado a partir de suas propriedades, entre as quais podemos destacar:

- a **tridimensionalidade**, traduzida por meio de conceitos como altura, largura e profundidade;
- a **homogeneidade**: o espaço exibe as mesmas características em cada um de seus pontos e
- a **isotropia**: o espaço se apresenta o mesmo em qualquer direção que seja considerada.

Ainda com relação ao conceito de espaço, lembramos que na mecânica Newtoniana pressupomos que o **espaço é absoluto.** Essa é a propriedade que transforma o espaço em algo que existe independentemente de algo externo a ele (a matéria, por exemplo). Essa é a concepção de espaço continente, adotada por Newton.

> Na visão Newtoniana, todos os objetos estariam inseridos no espaço, o qual independe desses objetos.

Figura 1.1: Objetos (Galáxias) localizados a bilhões de anos-luz de nós / Fonte: Nasa, ESA.

Observe a **Figura 1.1** e responda:

Em sua opinião, o espaço é finito ou infinito?

Eis aí uma questão intrigante. Na mecânica clássica, admitimos que o espaço seja infinito. Uma vez que os corpos celestes ocupam uma região no espaço, isso seria equivalente a admitir que o Universo não tem fronteiras. Essa resposta remete-nos a uma outra propriedade do espaço, que é relativa à sua geometria. E esse fato aponta para uma das limitações da mecânica clássica quando se trata de descrever os movimentos, pois ela descreve bem apenas os movimentos do cotidiano, não sendo muito útil para descrever o universo e, em particular, o seu movimento.

1.3 Tempo

Tempo é um outro conceito primitivo que tem relevância em todas as áreas das ciências. O fato é que, como no caso do espaço, a concepção, a natureza e as propriedades do tempo têm sido muito discutidas desde o início da cultura ocidental.

O tempo é um conceito muito difícil de ser definido. Do ponto de vista prático, o que importa é sabermos medir o tempo, mais precisamente, medir intervalos de tempo.

Damos o nome de relógio a qualquer dispositivo construído para medir o tempo. A medida de tempo entre dois eventos é feita através da comparação com um tempo padrão, e a unidade de tempo aceita universalmente é o **segundo**.

Figura 1.2: Relógios medem intervalos de tempo.

Algumas questões sobre o tempo têm sido objeto de interesse de cientistas, filósofos e até de pessoas ligadas às artes. O indivíduo comum também formula indagações sobre o tempo. A seguir selecionamos algumas questões de interesse científico.

Newton

Figura 1.3: Isaac Newton.

O tempo na mecânica de Newton é tido como absoluto e uniforme, entendendo-se por absoluto o fato de existir independentemente da matéria, do espaço e do estado de movimento do observador. Seria uniforme na medida em que ele transcorre da mesma forma, não evoluindo "mais depressa" ou "mais devagar" em função da região do espaço, da presença de matéria ou do seu estado de movimento.

O tempo é tido, na mecânica Newtoniana, como absoluto também no sentido de que dois eventos simultâneos, que ocorrem no mesmo instante para um observador, serão os mesmos para qualquer outro, ou seja, independentemente do movimento de um em relação ao outro.

Nas palavras de Newton: "O tempo absoluto, verdadeiro e matemático, por si mesmo e por sua própria natureza, flui igualmente sem relação com nada de externo e, com outro nome, é chamado de duração".

Einstein

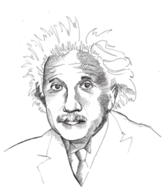

Figura 1.4: Einstein.

Einstein, no entanto, percebeu, ao formular sua teoria da relatividade em 1905, que existe uma relação entre as coordenadas de um evento e o tempo de ocorrência do mesmo evento quando medidos em sistemas de referência distintos. Assim, a teoria da relatividade restrita introduz uma interdependência entre espaço e tempo. Essa interdependência faz com que, para caracterizar um evento, tenhamos de determinar as três coordenadas e o tempo de ocorrência desse evento. É como se o espaço tivesse mais uma dimensão (a do tempo). Daí a ideia de um espaço-tempo quadridimensional, que emerge naturalmente da teoria de Einstein. O tempo perde o caráter absoluto, tornando-se relativo. Consequentemente, é também relativo o conceito de simultaneidade.

A partir dos trabalhos pioneiros de Einstein, tomamos conhecimento de que o intervalo de tempo entre dois eventos é, igualmente, relativo.

Mas o tempo é finito ou infinito?

Certamente, o tempo de existência do Universo é finito. Algo como 10^{10} anos. Ele tenderá ao infinito caso o Universo venha a se expandir para sempre. No entanto, o tempo será finito (no sentido de idade do Universo) se o Universo for fechado, isto é, ele se expandirá até certo ponto, a partir do qual estará em contração.

Pode-se viajar no tempo continuamente como se pudesse assistir a um filme de trás para frente?

Acreditamos que não. O tempo corre só numa direção. Por exemplo, os animais nascem e morrem, sempre nessa ordem e nunca na ordem inversa. Essa é a ideia de uma **flecha do tempo**.

A resposta para a existência da flecha do tempo pode estar no comportamento irreversível dos fenômenos naturais. A entropia de qualquer sistema fechado só aumenta. Assim, de acordo com a segunda lei da termodinâmica, a entropia tem também uma flecha, na medida em que ela só cresce, nunca diminui. O que isso tem a ver com a flecha do tempo? Tem-se sugerido que as duas propriedades estejam correlacionadas.

1.4 Posição no espaço

Quando nos referimos a um ponto do espaço estamos considerando que ele seja constituído de infinitos pontos, os quais diferem entre si pelas suas localizações. Admitimos, assim, um dos preceitos da **Geometria Analítica**. Nesse sentido, localizar um ponto no espaço é o mesmo que determinar a sua posição.

Uma vez que o movimento é a mudança de posição de um objeto no espaço, é de fundamental importância, no estudo de um fenômeno de interesse da Mecânica (como a queda de uma maçã), saber especificar a posição de um objeto localizado nesse espaço. Vide **Figura 1.5**.

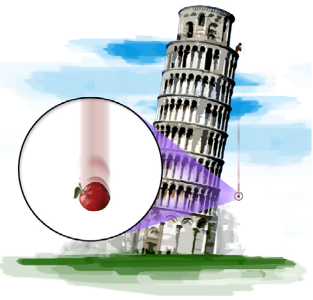

Figura 1.5: Posição do objeto no espaço num determinado instante de tempo.

Ao localizar uma estrela no céu, adotamos a ideia de que as estrelas são puntiformes. Isso se justifica em função da distância das estrelas. Assim, para descrever o movimento dos corpos celestes ou para **catalogar estrelas**, é ess[illegible]lhamos como localizar cada uma delas no espaço.

Clique nos termos em destaque para obter mais informações. Clique neste balão para fechá-lo.

> **!** Estudaremos, a [illegible] questão da determinação de um ponto no espaço por meio de um sistema de referência. A partir da escolha de um sistema de referência, podemos introduzir as coordenadas de um ponto. E este é o aspecto essencial no que diz respeito à localização de algo.

1.5 Eventos

Os fenômenos físicos são percebidos pelos nossos sentidos, ou analisados a partir de dados colhidos por meio de instrumentos de medida, como uma sucessão de eventos. Podemos pensar num evento como algo que está ocorrendo num determinado tempo e num determinado ponto do espaço ou num conjunto de pontos do espaço num instante de tempo bem definido.

Na geometria analítica, criada por René Descartes no século XVII, o espaço passa a ser considerado como uma coleção infinita de pontos. Um ponto do espaço passa a ser, assim, um conceito primitivo.

A questão a que nos dedicaremos a seguir é a de determinar um particular ponto do espaço. Para isso, devemos fazer uso de um referencial e de coordenadas.

Exemplo

Um particular fenômeno de nosso interesse, como a queda de uma maçã, será sempre registrado como uma sucessão de eventos, cada qual ocorrendo num conjunto de pontos do espaço em instantes de tempo bem definidos.

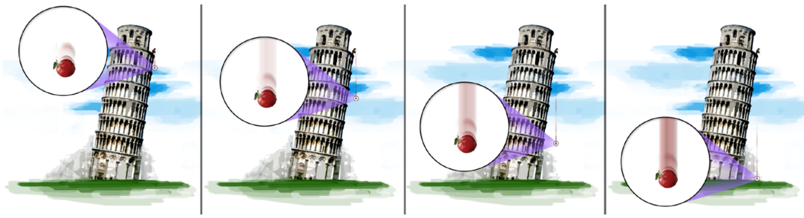

Figura 1.6: Queda da maçã vista como uma sucessão de eventos.

1.6 Movimentos

Movimentos são fenômenos associados ao deslocamento de **corpos materiais** à medida que o tempo passa; já o deslocamento se refere à mudança de posição do corpo no espaço.

Você lembra?

O ponto material é um conceito que se aplica quando as dimensões do corpo que se move não são importantes no estudo do fenômeno. Assim, dizemos que o corpo se localiza num determinado ponto do espaço. O caso mais realista é aquele em que os corpos são considerados rígidos, isto é, corpos constituídos a partir de um grande número de pontos materiais, tais que as distâncias entre eles não mudam com o tempo. Movimento, portanto, ocorre quando a posição de um objeto no espaço muda com o tempo.

Assim, no estudo da mecânica, é essencial a determinação da posição no espaço, a qual é caracterizada a partir das coordenadas.

1.7 Sistemas de referência

O estudo da mecânica requer, como primeiro passo essencial, que se adote um sistema de objetos materiais como referência para o estudo do movimento. Objetos materiais, como um marco de quilômetro numa rodovia ou uma estrela no céu, podem ser usados como referência. Essa é uma possibilidade concreta, real. No entanto, em geral, fazemos uso de conceitos abstratos que só fazem sentido se houver objetos como aqueles aos quais nos referimos antes. Assim, geralmente, não especificamos a matéria que, em última análise, é utilizada como referência. A matéria referência fica apenas implícita.

Figura 1.7: Referência de posição do objeto no espaço / Fonte: Thinkstock

A necessidade de se adotar um sistema de referência resulta de dois aspectos interligados do estudo da Mecânica:

- primeiro: o estudo sistemático e analítico do movimento requer o uso de conceitos (como posição), os quais só fazem sentido uma vez definido o sistema de referência; e
- segundo: muitos conceitos utilizados na mecânica são relativos, isto é, dependem do referencial. Esse é o caso da posição de um objeto. Dizer que algo está à direita, à esquerda, em cima ou em baixo só faz sentido quando adotamos um sistema de referência.

> O conceito de movimento, por exemplo, é também relativo, ou seja, um objeto pode estar em movimento em relação a um outro, mas pode estar em repouso em relação a um terceiro objeto.

Figura 1.8: As caixas estão em movimento ou em repouso? A resposta depende do referencial adotado.

Um exemplo simples ilustra o que foi dito acima. Consideremos um conjunto de caixas colocadas sobre um barco que se desloca impulsionado pelo vento. Para um indivíduo situado na praia, as caixas estão em movimento. Para o indivíduo no barco, as caixas estão em repouso. Dependendo do referencial adotado (a praia ou o barco), as caixas estarão em movimento ou em repouso.

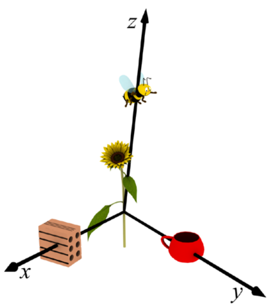

Figura 1.9: Três eixos passando por um ponto se constituem num referencial.

Entende-se por escolher um sistema de referência a escolha arbitrária de um ponto de origem (o ponto O) e um conjunto de três eixos passando por esse ponto.

Assim, um referencial exige, pelo menos, quatro objetos não alinhados no espaço. Esses objetos se constituem num referencial. Por esses objetos podemos passar três eixos, tendo como ponto comum um dos objetos, adotado agora como a origem do sistema de referência. Nesse sentido, não se pode falar em espaço absoluto, uma vez que, pelo menos para efeito de referência, ele depende da existência de matéria no espaço.

Tomando como base um conjunto de três eixos, um referencial é um conceito abstrato. Ele se torna real quando temos como localizar esses três eixos por meio de um conjunto de corpos (bastam quatro) ou pontos materiais.

1.7.1 Sistema de referência cartesiano

Como dito anteriormente, todo sistema de referência na mecânica requer a escolha de um ponto de referência, o qual é tido como essencial. A esse ponto damos o nome de ponto de origem (ou simplesmente 0) do sistema de referência. A escolha desse ponto é **arbitrária**. Os eixos que passam por esse ponto não precisam ser necessariamente ortogonais entre si. No entanto, o mais usual, dada a simplicidade, é a escolha de três eixos ortogonais entre si. Nessas condições, o sistema de referência é denominado **sistema cartesiano**. Muitas vezes, é útil recorrer a outros sistemas não cartesianos, e isso será ensinado oportunamente.

> **!** Um dos pressupostos fundamentais da Física é o de que qualquer referencial é igualmente útil, no sentido de equivalência, no estudo dos fenômenos. Entende-se por equivalência o fato de as leis físicas assumirem a mesma forma qualquer que seja o sistema de referência escolhido.

A escolha do referencial – ponto de origem (O) de um, dois ou três eixos – é o primeiro passo no estudo do movimento. Assim, no exemplo ao lado (**Figura 1.10**), temos dois referenciais. O referencial do observador (onde adotamos a origem no observador localizado na praia) e o referencial do barco. No referencial do barco, as caixas estão em repouso. No referencial do observador na praia, as caixas estão em movimento.

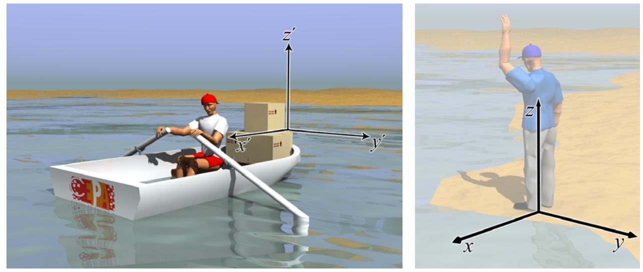

Figura 1.10: Dois sistemas de referência cartesiano: no primeiro, o sistema cartesiano tem origem num ponto fixo no barco. No segundo caso, o sistema tem origem fixa num ponto da praia.

Alguns movimentos, os chamados unidimensionais e bidimensionais, requerem apenas um eixo e dois eixos, respectivamente.

O número de opções de escolha de sistemas de coordenadas é, rigorosamente, infinito. Podemos orientar esses eixos e deslocá-los como quisermos, ou seja, a escolha do sistema de referência é arbitrária. Essa propriedade é assegurada pela homogeneidade e **isotropia** do espaço.

1.7.2 Referenciais inerciais

Como a escolha de sistema de referência é arbitrária, sempre nos perguntamos se faz alguma diferença escolher um sistema em repouso ou escolher outro que se movimente em relação ao primeiro. Os físicos estiveram ao longo dos anos analisando a questão da equivalência de tais escolhas.

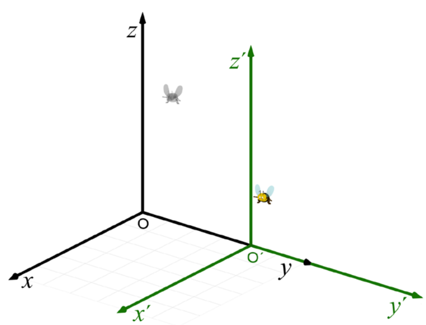

Figura 1.11: Dois sistemas em movimento relativo. São eles equivalentes? E em que sentido o são? A relatividade de Galileu e de Einstein.

Sistemas de referência, nos quais os pontos de origem – O e O' – se deslocam com velocidade constante um em relação ao outro, são ditos sistemas inerciais, se um deles o for. Uma definição mais precisa será dada quando apresentarmos as leis de Newton. Os referenciais da **Figura 1.11** são inerciais. Toda a mecânica pressupõe o uso de sistemas inerciais. Quando não for esse o caso, é preciso modificar as equações da mecânica.

Um pouco de história

Desde os tempos de Galileu, sabe-se que os sistemas inerciais são equivalentes entre si. No entanto, o conceito de equivalência de dois sistemas era objeto de discussão. Por exemplo, que grandezas físicas são absolutas? Grandezas absolutas são aquelas que assumem o mesmo valor nos dois sistemas. Tanto Galileu quanto Newton partiam do pressuposto de que intervalos de tempo medidos num sistema e no outro deveriam ser iguais nos dois sistemas. Entendiam eles que o tempo seria absoluto.

Einstein baseou toda a sua teoria da relatividade na ideia de que a velocidade da luz seria igual num sistema e no outro. Na teoria de Einstein, a velocidade da luz é absoluta. E isso faz toda a diferença entre a relatividade de Galileu (na qual o tempo é absoluto) e a relatividade de Einstein.

1.7.3 Escolha de referenciais

Um dos pressupostos fundamentais da física é o de que qualquer referencial é igualmente útil, no sentido de equivalência, no estudo dos fenômenos. O fato de termos equivalência entre dois sistemas cujas origens são deslocadas (translação pura) é conhecido como uma propriedade do espaço denominada **homogeneidade**.

A equivalência entre dois sistemas cujos eixos tenham experimentado uma rotação decorre da **isotropia do espaço**. Entende-se por equivalência o fato de as leis assumirem a mesma forma quer seja num sistema ou no outro.

No caso de sistemas em **movimento relativo uniforme**, vale a mesma exigência de que as equações físicas tenham a mesma forma. Essa é a base tanto da relatividade de Galileu quanto da de Einstein. Como consequência desse fato, não podemos distinguir, por meio de experiências levadas a cabo num ou no outro sistema, quem está em movimento.

1.8 Coordenadas

Uma vez adotado um sistema de referência, o próximo passo importante será o de caracterizar a posição de um objeto, que é determinada pelas suas coordenadas.

É importante entender que as coordenadas de um ponto são especificadas apenas depois da escolha de um sistema de referência, pois elas não fazem sentido sem essa providência.

Em alguns casos, como no movimento ao longo de uma rodovia, precisamos de apenas uma coordenada. Às vezes bastam duas coordenadas. No entanto, no caso mais geral possível, devemos fazer uso de um conjunto de três coordenadas. Por essa razão, dizemos que o espaço físico é tridimensional. Usualmente, referimo-nos a essas coordenadas usando a altura, a profundidade e a largura. No entanto, muitas vezes, é mais conveniente escolher outra coordenada. Temos várias alternativas de escolha e, portanto, temos várias formas de indicar a posição de um objeto.

As coordenadas cartesianas são definidas a partir de um sistema de referência cartesiano. Por tal sistema entendemos um ponto de origem O arbitrário, adotado como um ponto de referência, e um conjunto de eixos ortogonais, que são eixos perpendiculares entre si, passando por esse ponto. Esse sistema permite especificar a posição de um objeto a partir das suas coordenadas cartesianas.

1.8.1 Coordenadas cartesianas em uma dimensão

Para entender as coordenadas cartesianas e o significado físico de coordenadas cartesianas com valores negativos, consideremos o problema mais simples de caracterizar a posição de um objeto (um besouro) localizado ao longo de um fio retilíneo.

Para especificarmos a posição P do besouro no fio, adotamos um ponto de referência chamado de origem O, que é a origem do sistema de coordenadas. Observa-se que o ponto O divide o fio retilíneo em dois segmentos de reta – um à direita e outro à esquerda de O. Num desses segmentos, as coordenadas terão valores positivos e, no outro, as coordenadas assumirão valores negativos. O próximo passo será especificar para qual dos dois segmentos de reta atribuiremos valores positivos às coordenadas. Esse passo tem o nome de orientação do eixo das coordenadas. Tal escolha será indicada por uma flecha, isto é, o sentido da flecha indica o sentido no qual as coordenadas terão valores positivos.

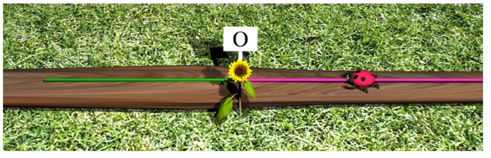

Figura 1.12: A origem do sistema é um ponto de referência e ela divide o eixo em dois segmentos de reta.

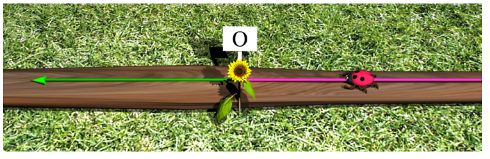

Figura 1.13: Mediante a orientação do eixo, especificamos que valores das coordenadas assumem valores positivos (aqueles indicados pela cor verde) e negativos (sinalizados mediante o uso da cor rosa).

Utilizando esse ponto de origem O, especificamos a coordenada cartesiana (x) do objeto (o besouro, por exemplo) da seguinte forma: primeiro, determinamos a distância (d) do objeto até a origem.

O valor da coordenada x do ponto P será igual à distância até a origem se P estiver no sentido da flecha a partir da origem. Caso contrário, o valor da coordenada será igual à distância precedida de um sinal menos, ou seja, as coordenadas terão valores negativos quando o ponto P estiver no sentido oposto ao da flecha a partir da origem. Para o eixo graduado em metros, a coordenada cartesiana do besouro é -2 m.

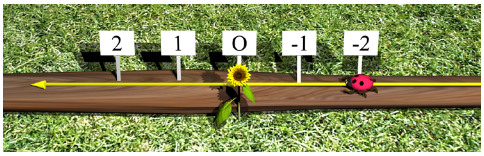

Figura 1.14: As coordenadas assumem valores que dependem da distância do objeto, do ponto de origem e da orientação do eixo. Nesse caso, a coordenada assume um valor negativo.

Na **Figura 1.14**, temos um sistema cartesiano útil para o estudo do movimento ao longo do fio. O movimento que acontece ao longo de um eixo (o eixo x) é tido como unidimensional.

1.8.2 Coordenadas cartesianas em duas e três dimensões

A extensão das coordenadas cartesianas aplicadas a duas dimensões pode ser entendida a partir do exemplo da **Figura 1.15**, no qual temos duas bolas sobre uma mesa. As duas coordenadas cartesianas (x e y) da posição P de cada bola seriam determinadas da seguinte forma:

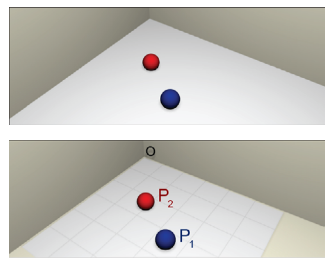

Figura 1.15: A origem do sistema pode ser tomada como um dos cantos de uma caixa ou o seu centro.

Primeiro, adota-se uma origem (O) do sistema de coordenadas (**Figura 1.15**).

Em seguida, faz-se passar pela origem dois eixos ortogonais, isto é, retas perpendiculares, dando para cada um dos eixos uma orientação. Temos agora um sistema cartesiano para descrever o movimento em duas dimensões (**Figura 1.16**).

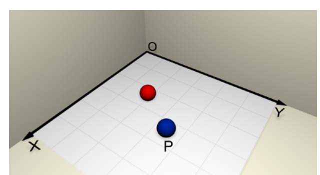

Figura 1.16: Sistema cartesiano em duas dimensões: dois eixos ortogonais entre si e orientados.

Agora traçamos, a partir de P, duas retas paralelas aos eixos e tracejadas até elas encontrarem os eixos Ox e Oy, respectivamente. Esses pontos de encontro das retas tracejadas com os eixos definem as coordenadas cartesianas da posição do corpo (**Figura 1.17**).

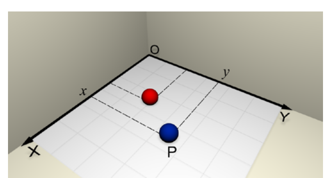

Figura 1.17: Retas paralelas aos eixos a partir do ponto definirão as duas coordenadas de cada ponto.

No caso do movimento no espaço tridimensional, é suficiente acrescentarmos ao sistema de dois eixos x e y mais um eixo z (**Figura 1.18**).

Para determinar as coordenadas do ponto P ocupado pela abelha no sistema de coordenadas tridimensional, primeiramente, traçamos uma reta paralela ao eixo z do ponto P até encontrar o plano xy em P' e, do ponto P, traçamos uma reta perpendicular ao eixo 0_z que define a coordenada z'. Em seguida, pelo ponto P' traçamos paralelas aos eixos 0_x e 0_y, definindo as coordenadas x' e y'. As coordenadas x', y' e z', assim definidas, representam as coordenadas cartesianas do ponto P no referencial cartesiano tridimensional e recebem o nome de sistema cartesiano em três dimensões (**Figura 1.19**).

Podemos, então, concluir que, utilizando um sistema de coordenadas cartesianas, a posição P de um objeto pode ser inteiramente especificada através do conjunto de coordenadas cartesianas x, y, z, e vice-versa.

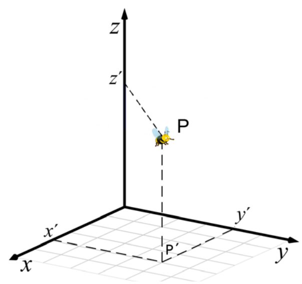

Figura 1.18: Determinando as coordenadas cartesianas em três dimensões.

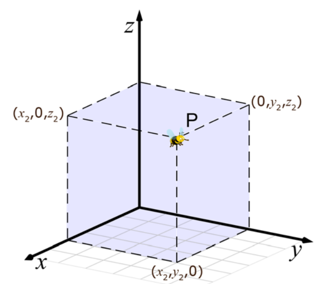

Figura 1.19: Outra forma de determinar um ponto a partir de sistema cartesiano em três dimensões.

Exemplos

- **Exemplo 1:**

Considere um quadrado ABCD e um referencial cartesiano plano (x, y). Considere que cada quadrado do plano tem dimensões 10 cm × 10 cm (**Figura 1.20**). Cada lado tem, portanto, 120 cm.

I. Escreva, em notação cartesiana, a posição de cada vértice do quadrado, do ponto E (centro do quadrado) e da origem O do sistema.

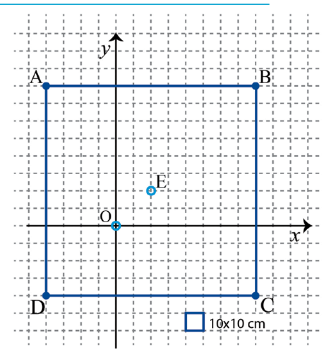

Figura 1.20: Os pontos de um quadrado e um possível referencial.

→ Resolução:

Cada ponto de um sistema de referência cartesiano plano é identificado por um par ordenado de valores x e y, denominados, respectivamente, abscissa (x) e ordenada (y). Os eixos cartesianos dividem os pontos do plano em 4 regiões denominadas "quadrantes" (**Figura 1.21**).

Pontos equidistantes do eixo y têm abscissas iguais.

Pontos equidistantes do eixo x têm ordenadas iguais.

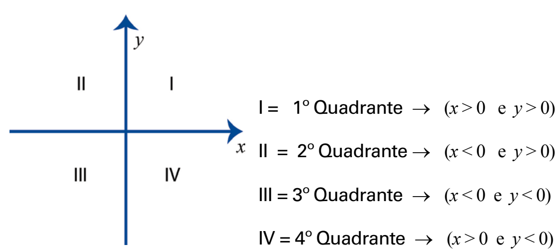

Figura 1.21: Os quadrantes.

Para distâncias medidas em centímetros, as coordenadas dos pontos referidos na **Figura 1.20** são apresentadas na tabela a seguir.

	Abscissa	Ordenada	Notação cartesiana
A	–40	80	A(–40, 80)
B	80	80	B(80, 80)
C	–40	–40	C(–40, –40)
D	80	–40	D(80, –40)
E	20	20	E(20, 20)
O	0	0	O(0, 0)

II. Quais seriam as novas coordenadas dos pontos mencionados no item (I) após a origem do sistema de referência ser transladada para a quina B do quadrado (**Figura 1.22**)?

→ Resolução:

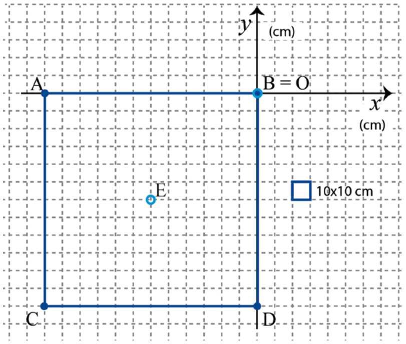

Figura 1.22: Os pontos no novo referencial.

	Abscissa	Ordenada	Notação cartesiana
A	- 120	0	A(-120, 0)
B	0	0	B(0, 0)
C	-120	-120	C(-120, -120)
D	0	-120	D(0, -120)
E	-60	-60	E(-60, -60)
O	0	0	O(0, 0)

- Exemplo 2:

A caixa da **Figura 1.23** tem dimensões 10 cm × 30 cm × 40 cm. Um sistema de referência cartesiano tridimensional é adotado tomando o plano *xz* coincidente com um dos lados da caixa (arestas do paralelogramo ou arestas do poliedro) e a origem em uma das quinas (vértices).

a. Determinar as coordenadas cartesianas de cada quina (vértice).

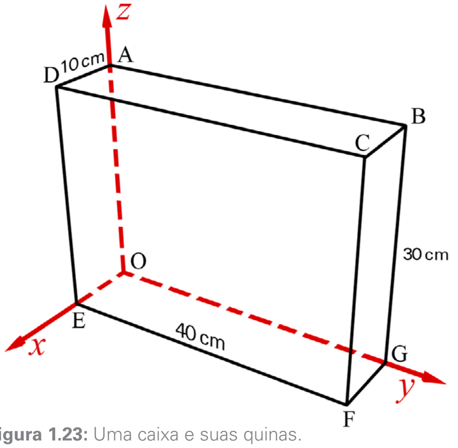

Figura 1.23: Uma caixa e suas quinas.

→ RESOLUÇÃO:

Um ponto no espaço é caracterizado por 3 coordenadas.

A representação de um ponto P no espaço, na notação cartesiana, é $P(x, y, z)$.

Cada par de eixos define um plano (**Figura 1.24**). Temos, assim, três planos:

As coordenadas cartesianas de um ponto P são dadas, com exceção de sinal, pela distância a esses planos.

- $x = \pm$ distância do ponto P até o plano yz
- $y = \pm$ distância do ponto P até o plano xz
- $z = \pm$ distância do ponto P até o plano xy

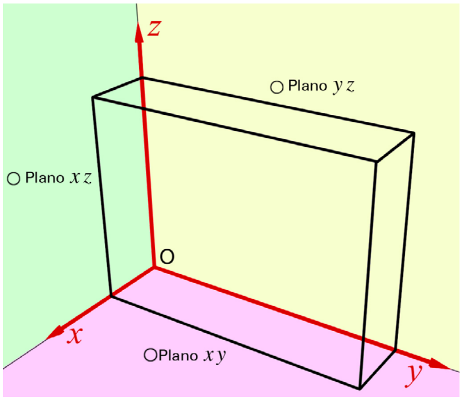

Figura 1.24: Os planos xy, xz e yz.

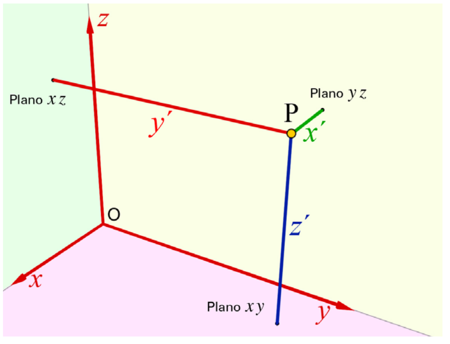

Figura 1.25: As coordenadas x, y e z e os planos yz, xz e xy.

Eixos	Plano definido
x ; y	xy
x ; z	xz
y ; z	yz

Pontos no plano yz	$x = 0$
Pontos no plano xz	$y = 0$
Pontos no plano xy	$z = 0$

De acordo com a definição, as coordenadas das quinas da caixa, usando a notação cartesiana $P(x, y, z)$, são:

A(0, 0, 30)
E(10, 0, 0)
B(0, 40, 30)
F(10, 40, 0)
C(10, 40, 30)
G(0, 40, 0)
D(10, 0, 30)
O(0, 0, 0)

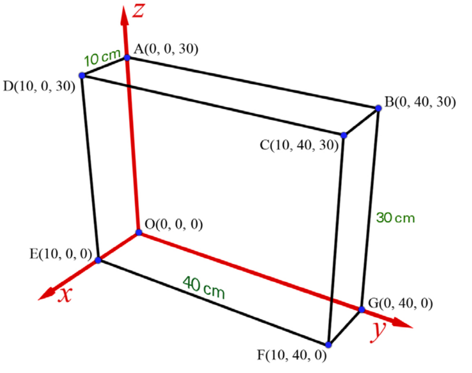

Figura 1.26: Oito pontos no espaço e suas coordenadas cartesianas.

b. Se a origem do sistema de coordenadas for transladada para a quina F, quais as novas coordenadas de cada quina? A **Figura 1.27** ilustra a nova posição do referencial.

→ Resolução:

Em relação ao novo referencial:

1. A, B, C e D posicionam-se a 30 cm do plano *xy*. Considerando-se a orientação do eixo *z*, eles têm coordenadas $z = 30$.
2. A, B, O e G posicionam-se a 10 cm do plano *zy*. Levando-se em conta a orientação do eixo *x*, têm coordenadas $x = -10$.
3. A, D, E e O posicionam-se a 40 cm do plano *xz*. Todos têm coordenadas $y = -40$.
4. E, F(origem), G e O pertencem ao plano *xy*; têm coordenadas $z = 0$.
5. C, B, G e F pertencem ao plano *zx*; têm coordenadas $y = 0$.
6. D, C, E e F pertencem ao plano *yz*; têm coordenadas $x = 0$.

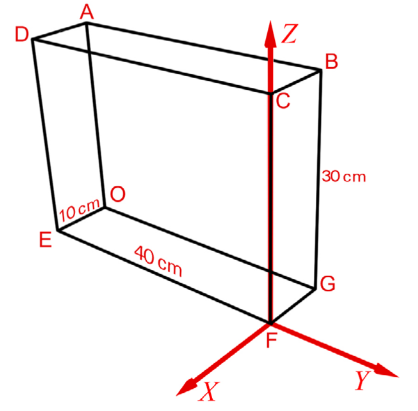

Figura 1.27: Origem do novo referencial na quina F.

Resumindo:

A(–10, –40, 30)	C(0, 0, 30)	E(0, –40, 0)	G(–10, 0, 0)
B(–10, 0, 30)	D(0, –40, 30)	F(0, 0, 0)	O(–10, –40, 0)

1.9 Aplicações

1.9.1 Distância entre dois pontos no plano

É importante destacar o conceito de distância entre dois pontos do espaço. Essa grandeza física é passível de mensuração. Para isso, deve-se adotar uma unidade de medida de distância. O metro tem se consolidado como a unidade mais utilizada hoje, sendo uma das unidades básicas do Sistema Internacional de Medidas - SI.

Dois pontos do espaço podem ser interligados por diversos caminhos. O caminho que cobre a menor distância entre eles é um segmento de reta que passa por esses pontos. E, sempre que falamos de **distância** entre dois pontos do espaço, referimo-nos à menor distância entre eles. Observe os exemplos (**Figura 1.28**).

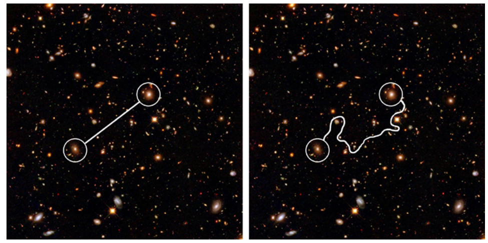

Figura 1.28: A menor distância entre dois pontos. / Fonte: Nasa, ESA.

Uma vez determinadas as coordenadas de dois pontos, podemos inferir a distância entre eles. De fato, sabemos da geometria euclidiana, que a menor distância d entre dois pontos P_1 e P_2, cujas coordenadas são $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, é dada pela expressão:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \qquad 1.1$$

Exemplo

Considere o caso de um segmento de reta AB, cujas extremidades têm coordenadas A(–80, 40) e B(80, 160). Trace o segmento de reta num referencial cartesiano (x, y) e calcule a distância AB.

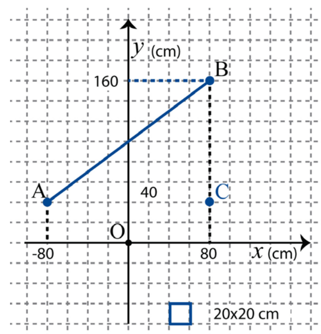

Figura 1.29: Esquema dos segmento AB no referencial xy.

→ Resolução:

A **Figura 1.29** ilustra o referencial cartesiano, os pontos A e B e o segmento de reta AB.

O resultado pode ser obtido a partir de **1.1**, que permite determinar a distância entre dois pontos A e B. Neste exemplo, como $z_A = z_B = 0$, a relação se reduz a:

$$\text{Distância AB} = \sqrt{[x_B - x_A]^2 + [y_B - y_A]^2}$$

Substituindo-se os valores das ordenadas e abscissas de cada ponto, tem-se:

$$\text{Distância AB} = \sqrt{160^2 + 120^2} = 200 \text{ cm}$$

Agora é sua vez...

Acesse o Ambiente Virtual de Aprendizagem e realize a(s) atividade(s) proposta(s).

Glossário

Arbitrária: A critério de cada um.

Corpos materiais: Objetos dotados de massa.

Catalogar estrelas: Especificar a posição das estrelas na abóboda celeste.

Isotropia: Conceito no qual o Universo se apresenta o mesmo para qualquer observador em qualquer direção que se olhe.

Movimento relativo uniforme: Com velocidade constante.