3

MOVIMENTO:
CONCEITOS CINEMÁTICOS

Gil da Costa Marques

3.1 Movimentos no Universo

Figura 3.1: Queda da maçã em direção ao centro da Terra.

O movimento é o fenômeno mais evidente no mundo físico, pois convivemos com ele no dia a dia. O movimento natural, de longe o mais comum, é o da queda dos objetos em direção ao centro da Terra; a queda de uma maçã é apenas um exemplo trivial desse fenômeno.

Outros movimentos, como os dos elétrons circulando em torno dos núcleos atômicos, são quase imperceptíveis.

Conquanto isso não seja nada evidente, pois estivemos enganados a esse respeito durante milhares de anos, o fato é que tudo que existe no Universo está em movimento. O próprio Universo está em movimento. O Sol está em movimento, assim como o nosso Mundo, o qual executa vários tipos de movimento enquanto dá uma volta completa em torno do Sol.

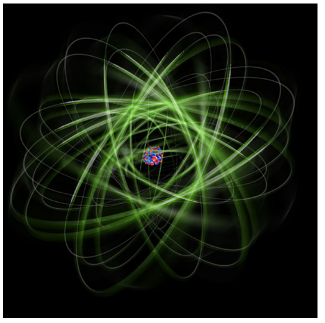

Figura 3.2: Movimento no átomo.

Surpreendentemente, as estrelas se movimentam, bem como as galáxias. Algumas se movem bem rápido. Uma das mais velozes é a estrela errante de Barnard. Ela se move em direção ao Sol, à incrível velocidade de 500.000 km/h.

Figura 3.3: Estrela de Barnard.

Ao observarmos as estrelas, elas parecem se deslocar pouco. Mas isso só aparentemente, devido à grande distância que há entre elas e nós.

O caso das galáxias é ainda mais curioso. Todas elas se afastam de nós. Algumas galáxias se movimentam mais lentamente, outras mais rapidamente. A lentidão ou a rapidez do movimento, ambas dependem da distância da Galáxia. Quanto mais longe elas estão, mais rapidamente se afastam de nós. Quanto mais próximas, mais lentamente elas se afastam. Ainda não entendemos em profundidade esse comportamento, que tem o nome de **Lei de Hubble**, mas sabemos que isso acarreta um Universo em expansão.

Figura 3.4: Ilustração da Galáxia de Andrômeda. / Fonte: Cortesia de Hubble.org

Movimentos imperceptíveis a olho nu ocorrem no mundo atômico, no mundo subatômico e no nível celular. São, nesse caso, extremamente complexos e, na maioria das vezes, sua análise requer a introdução de uma nova mecânica: **a mecânica quântica**. Assim, em qualquer escala de distância que se considere, o fenômeno do movimento estará presente.

Em Mecânica estudamos o movimento de um **ponto material** ou, ainda, de uma **partícula**. Esses entes físicos chamados partículas são objetos de certa forma idealizados, pois lidamos com eles como se fossem apenas pontos no espaço, de dimensões muito reduzidas. Um objeto menos idealizado pode ser tratado como uma coleção de pontos materiais, com a qual lidaremos apenas em cursos mais avançados.

O estudo da dinâmica do movimento, em que analisamos o movimento levando em conta suas causas, deve ser precedido da introdução de conceitos cinemáticos, tais como coordenadas, trajetória, velocidade e aceleração.

3.2 Movimento e Repouso

O primeiro passo no estudo do movimento consiste na escolha de um referencial. Em particular, devemos especificar a origem do sistema de referência e os três eixos cartesianos. A partir dessa escolha devemos introduzir as coordenadas. A seguir, consideraremos o caso das coordenadas cartesianas.

Dizemos que um corpo está em repouso se a sua posição não muda com o tempo. Se, no entanto, sua posição variar com o tempo, ele estará em movimento. Observa-se que, se um objeto estiver em movimento, à medida que o tempo passa, suas coordenadas (x, y, z) (ou pelo menos uma delas) mudarão.

Dizemos que, quando o objeto está em movimento, as coordenadas dependem do tempo decorrido, isto é, são funções do tempo e, por isso, escrevemos:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \text{ lê-se: } x \text{ é função de } t \\ y &= y(t) \text{ lê-se: } y \text{ é função de } t \\ z &= z(t) \text{ lê-se: } z \text{ é função de } t \end{aligned} \tag{3.1}$$

Não existe a necessidade de que todas as coordenadas variem com o tempo, basta que uma delas varie para que possamos falar em movimento.
E os conceitos de movimento e repouso dependem do referencial adotado. Além disso, a definição de movimento se aplica quando consideramos um conjunto qualquer de coordenadas.

3.3 Trajetória

Uma partícula se movimenta ao longo de uma curva. Essa curva, no caso do movimento, é a trajetória dessa partícula.

Para entender a noção de trajetória, basta considerarmos um exemplo simples: o movimento de uma borboleta numa sala, sendo fotografado em intervalos de tempo regulares e muito curtos (**Figura 3.5**).

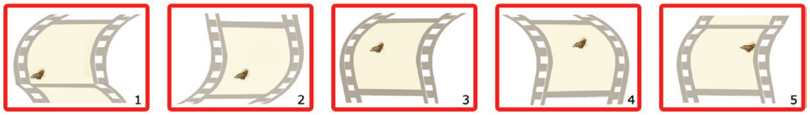

Figura 3.5: Fotos do movimento, tiradas em intervalos de tempo regulares.

Agora vamos sobrepor as fotos.

O resultado seria o que se vê na **Figura 3.6**. Quando interligamos os diversos pontos pelos quais a borboleta passou, obtemos uma curva no espaço (**Figura 3.7**). Essa curva é a trajetória percorrida pela borboleta. Cada ponto da trajetória representa um ponto pelo qual a borboleta passou em algum instante de tempo.

Se tirássemos as fotos em intervalos de tempo menores, obteríamos algo semelhante ao mostrado na **Figura 3.8**.

A trajetória nada mais é, portanto, do que uma curva no espaço. Cada ponto dessa curva foi (ou será) visitado pela partícula ao menos uma vez.

A trajetória é o lugar geométrico dos pontos do espaço ocupado por um ponto material em movimento.

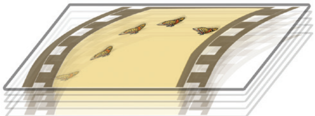
Figura 3.6: Sobreposição das fotos.

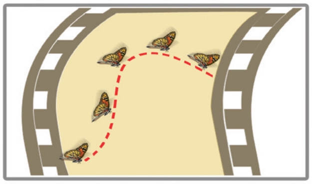
Figura 3.7: Interligação dos pontos.

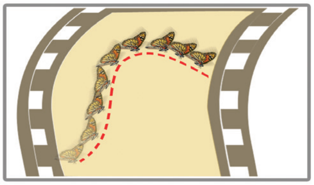
Figura 3.8. Fotos em Intervalos menores.

3.4 A coordenada espaço

A seguir estudaremos os conceitos cinemáticos em um caso bastante simples, mas muito ilustrativo. Eles são úteis, no entanto, no caso em que estudamos o movimento de uma partícula ao longo de uma curva predeterminada. Nesse caso, a descrição do movimento é feita por meio do uso de apenas uma coordenada. E essa coordenada está intimamente ligada à distância percorrida ao longo da curva. Assim, a velocidade e a aceleração estão relacionadas a taxas de variação dessa coordenada.

Embora as coordenadas cartesianas sejam as mais simples, outras coordenadas, no entanto, já se incorporam ao nosso cotidiano. Por exemplo, os marcos de quilômetros nas rodovias são coordenadas que nos permitem determinar a nossa posição ao longo da rodovia.

A coordenada "espaço" – nome que gera confusão com o conceito fundamental – é uma generalização dos marcos de quilômetros numa rodovia. Consideremos o caso mais geral do movimento de uma partícula que se dá ao longo de uma curva predeterminada: pode-se pensar na curva como uma pista de rodovia, porque este é, provavelmente, o exemplo mais simples para ilustrar o que queremos. Quando isso acontece, o estudo do movimento se simplifica, pois basta uma coordenada para caracterizar a posição ao longo da curva. Essa coordenada tem o nome de espaço.

A seguir, vamos definir um pouco melhor o que é a **coordenada espaço**. Em primeiro lugar, escolhemos um ponto qualquer ao longo da curva como a origem dos espaços – o ponto O.

Definimos em que direção os espaços serão tomados como positivos. Isso significa orientar os espaços, o que é feito através de uma flecha. Essa flecha indica o sentido positivo.

Em seguida, determinamos a distância d do ponto P até o ponto O, distância essa medida ao longo da curva. O espaço é, então, definido a partir da seguinte convenção:

- $S = +d$ se estiver no sentido da flecha a partir da origem O;
- $S = -d$ se estiver no sentido oposto ao da flecha a partir da origem O, onde d é a distância da partícula até a origem (ao longo da curva).

Observe aqui a semelhança com a determinação das coordenadas cartesianas no caso do movimento unidimensional.

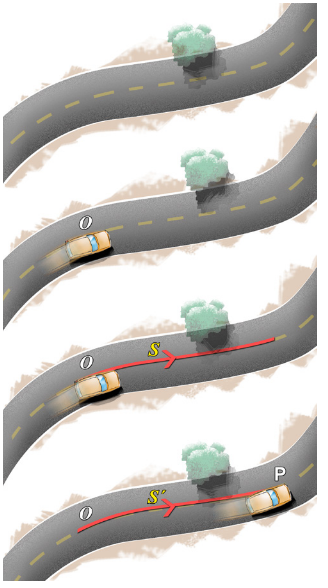

Figura 3.9: Movimento ao longo de uma curva.

Quando utilizamos a coordenada espaço ou o marco dos quilômetros numa rodovia, devemos estabelecer uma distinção entre diferenças de coordenada e distância.

A distância entre dois pontos ao longo da trajetória bem definida (uma curva) é dada pelo módulo da diferença das suas coordenadas. Sendo A e B tais pontos, escrevemos:

$$d = \left| S_B - S_A \right| \quad (3.2)$$

Da expressão acima segue-se que a distância do ponto A até o ponto B é a mesma que a distância do ponto B até o ponto A, pois,

$$d = \left| S_B - S_A \right| = \left| S_A - S_B \right|$$

A distância percorrida, por outro lado, leva em conta a soma das distâncias entre invervalos de tempo nos quais o móvel troca o sinal da sua velocidade. Assim, escrevemos:

$$d = \sum_{i=1}^{n} d_i \quad (3.3)$$

onde d_i representa a distância percorrida entre os instantes de tempo nos quais o móvel tem o mesmo sinal da velocidade, isto é, trafega no mesmo sentido.

O marco dos quilômetros numa rodovia é o melhor exemplo, no cotidiano, da indicação dos espaços (coordenadas) ao longo de uma curva. A curva, nesse caso, é o leito da rodovia.

Toma-se um ponto como origem dos espaços. No caso das rodovias paulistas, o marco zero é a Praça da Sé. A partir desse ponto de origem, indicamos as distâncias em quilômetros. Introduzimos um marco de quilometragem a cada quilômetro. Nele indicamos a distância até a origem (Praça da Sé).

Um sistema de coordenadas "espaço" ao longo da rodovia é uma linha imaginária que segue o seu traçado.

Figura 3.10: Coordenada espaço e marcos de quilômetros.

Figura 3.11: A origem dos marcos quilométricos é a Praça da Sé, mas o origem do referencial "coordenadas espaço" (S = 0) estabelecido na Via Anchieta é o km 10.

Na linha imaginária de uma curva, como a Via Anchieta, o marco "km 10" pode ser adotado como origem das coordenadas espaço (S = 0); assim, as posições S de um veículo seriam as distâncias, medidas ao longo da trajetória, dos respectivos pontos por onde ele passar até a origem S = 0. Se o marco "km 0" fosse adotado como origem, o espaço zero (S = 0) estaria na Praça da Sé, onde se localiza o km 0 das rodovias estaduais do Estado de São Paulo.

Exemplos

- Exemplo 1

A **Figura 3.12** ilustra uma pista de teste para automóveis. Nela adotou-se o marco 0 como origem das coordenadas espaço. A coordenada do marco A é S_A = 100 m e a do marco B é S_B = 400 m.
No instante t_0 = 0 um carro passa pelo marco A e após 30 segundos, pelo marco B. A tabela registra alguns valores do espaço S em função do tempo t.

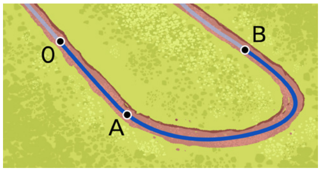

Figura 3.12.

t (s)	0	5	10	15	20	25	30
s (m)	100	150	200	250	300	350	400

a. Esboçar um gráfico cartesiano do espaço s em função do tempo t do movimento.
b. Qual a distância percorrida entre t_1 = 5 s e t_5 = 25 s?

→ Resolução:
a. Esboço do gráfico.
A tabela mostra uma forma de visualização da interdependência entre as variáveis espaço (s) – denominada variável dependente – e a do tempo (t) – a variável independente.
A dependência do espaço em função do tempo pode ser mostrada de forma mais simples por meio de um gráfico cartesiano.
Os valores do tempo t (variável independente) são inseridos no eixo das abscissas "x" e os valores dos respectivos espaços (variável dependente) são inseridos no eixo das ordenadas "y". Cada par de valores (t, s) representa um ponto no gráfico cartesiano.

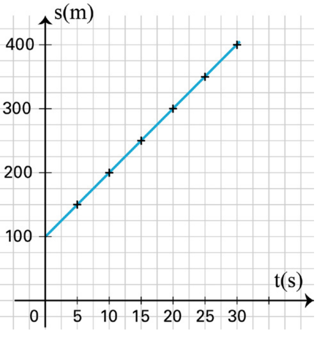

Gráfico 3.1

A sequência desses pontos sugere como, matematicamente, o espaço depende do tempo.

Importante: O gráfico $S = s(t)$ é retilíneo, mas a trajetória do carro é curvilínea. Não confundir o gráfico da função com a trajetória.

b. Distância percorrida ou espaço percorrido.

Distância percorrida ou espaço percorrido é a mesma coisa? Vamos diferenciá-los.

A distância percorrida é aquela que podemos obter no "odômetro" do carro (medidor de quilometragem); ela é sempre positiva, esteja o carro movimentando-se no sentido crescente do espaço ou no sentido decrescente.

O espaço percorrido $\Delta s = s_2 - s_1$ é algébrico (pode ser negativo ou positivo); se $s_2 > s_1 \rightarrow \Delta s > 0$; caso contrário, o espaço percorrido será negativo.

No exemplo em questão: intervalo de tempo $\Delta t = t_5 - t_1 = (25 - 5)s = 20\ s$, o espaço percorrido é $\Delta s = S_5 - S_1 = (350 - 150)\ \text{m} = 200\ \text{m}$.

Logo, a distância percorrida é $d_{\text{percorrida}} = |\Delta s| = 200\ \text{m}$.

3.5 Velocidade

Muitas vezes, referimo-nos a objetos se movendo lentamente e a objetos dotados de movimentos rápidos. Os dois conceitos são relativos e referem-se à taxa com que um objeto muda de posição.

Como visto antes, a taxa de variação é um conceito utilizado com muita frequência e, por isso, muito importante na Física.

Conceito

A velocidade é definida como a taxa de variação da posição de um objeto em função do tempo. Se a posição de um objeto mudar com o tempo, ele tem, portanto, uma velocidade. Se ele está em repouso, sua velocidade é nula.

Um dos aspectos mais relevantes a respeito da grandeza física denominada velocidade é o fato de que, quando determinada de uma forma matematicamente precisa, ela não só indica a taxa com que a distância percorrida pela partícula varia com o tempo, como também indica a direção (bem como o sentido) que a partícula tomará a seguir.

A caracterização de cada ponto no espaço se dá por meio das coordenadas do ponto. Portanto, o conceito de velocidade é um pouco mais complexo do que parece à primeira vista. Sua conceituação mais geral requer a análise do movimento no espaço tridimensional.

Faremos aqui uma discussão mais simples, baseada apenas no conceito de distância percorrida.

A velocidade introduzida a partir do conceito de distância percorrida não permite indicar a direção do movimento da partícula. No entanto, ela dá a ideia da rapidez com que o movimento acontece.

3.6 Velocidade escalar

Analisemos o movimento a partir de uma das suas propriedades, que é a taxa de variação das distâncias percorridas pelo móvel.

Quando um objeto se move ao longo de uma curva bem definida, a distância ao longo da curva até a origem varia com o tempo. A essa distância associamos o conceito da variável espaço. Dizemos que, em um movimento, a variável espaço "s" é função do tempo "t" e, assim, escrevemos: $s = s(t)$.

Digamos que, no instante de tempo t_1, a partícula estava em s_1 e que, no instante t_2, ela está em s_2. Admitiremos $t_2 > t_1$.

Assim, no **intervalo de tempo** Δt, dado por

$$\Delta t = t_2 - t_1 \qquad (3.4)$$

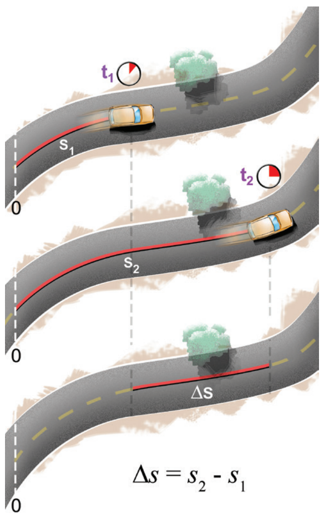

Figura 3.13: Espaço percorrido entre dois instantes de tempo.

houve uma variação de espaços Δs, dada por

$$\Delta s = s_2 - s_1 \qquad (3.5)$$

que é, por definição, o **espaço percorrido** entre esses instantes de tempo.

Definimos a velocidade escalar média, representada por $\overline{v}$, como o quociente entre o espaço percorrido e o intervalo de tempo decorrido:

$$\boxed{\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}} \qquad (3.6)$$

- Exemplo 2

Um motorista dirigindo o seu carro pela SP - 330 (Via Anhanguera) rumo ao interior do estado, às 11h cruza o marco km 42; e às 14h30 min ele estaciona o carro no marco km 315. Calcule a velocidade escalar média do carro.

→ Resolução:

A velocidade média é a taxa de média da variação do espaço percorrido em relação ao intervalo de tempo. Daí obtemos, nesse caso:

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(315-42)\ \text{km}}{(14,5-11)\ \text{h}} = \frac{273\ \text{km}}{3,5\ \text{h}} = 78\ \text{km/h}$$

Unidade de medida de velocidade

$$\text{Unid.(velocidade média)} = \frac{\text{Unid}(\Delta s)}{\text{Unid}(\Delta t)} = \frac{\text{unid}(\text{comprimento})}{\text{unid}(\text{tempo})}$$

No SI a unidade de medida de espaço (comprimento) é o metro (m) e a do tempo é o segundo (s); assim, a unid $(\overline{v})$ = m/s. Neste exemplo: $\overline{v}$ = 78 km/h. Essa velocidade pode ser expressa em m/s. Para isso, é necessário transformar km → m e h → s:

$$\overline{v} = 78\ \text{km/h} = 78 \times \frac{1000\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = [78/3,6]\ \text{m/s} \cong 21,7\ \text{m/s}$$

Observação: a velocidade média NÃO É a média das velocidades registradas pelo velocímetro do carro.

- Exemplo 3

Ainda considerando os dados do Exemplo 2, na viagem de volta o tempo de retorno foi de 4 horas e 12 minutos. Calcule a velocidade escalar média no retorno.

→ Resolução:

Considerando a origem dos espaços na praça da Sé, os espaços coincidem com os marcos dos quilômetros da rodovia (origem no centro da cidade de São Paulo e crescente no sentido do interior do estado).

No retorno teremos:

- Δt = variação do tempo = 4 h e 12 min = 4,2 h.
- Δs = variação do espaço = (42 − 315) km = −273 km

Como se vê, dependendo do sentido do movimento em relação ao referencial adotado, a variação dos espaços Δs pode ser negativa.

- $\Delta s > 0 \rightarrow$ Movimento progressivo $\rightarrow$ Movimento no sentido crescente dos espaços.
- $\Delta s < 0 \rightarrow$ Movimento retrógrado $\rightarrow$ Movimento no sentido decrescente dos espaços.

Portanto, no retorno, $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{-273\ \text{km}}{4{,}2\ \text{h}} = -65\ \text{km/h}$.

O sinal negativo não significa que o velocímetro se movimentou no sentido oposto, nem que o carro deu marcha ré. Trata-se de uma convenção matemática inerente à escolha da origem do referencial. $\Delta s < 0$ ou $\bar{v} < 0 \rightarrow$ movimento foi retrógrado.

3.7 Velocidade escalar instantânea

Observa-se que a velocidade escalar média sempre faz referência a **dois** instantes de tempo (por isso, falamos em média). No entanto, a velocidade que mais nos interessa é a velocidade num determinado instante de tempo. Tal velocidade é denominada **velocidade instantânea**.

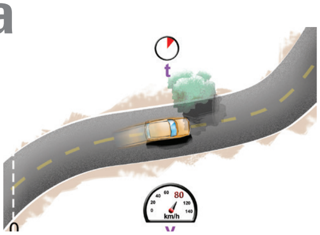

Figura 3.14: O velocímetro determina a velocidade instantânea de um móvel.

Para definirmos a **velocidade instantânea**, devemos recorrer a um artifício matemático conhecido como **limite**.

Observemos primeiramente que a velocidade média é definida tomando-se dois instantes de tempo. Para defini-la num determinado instante, basta tomarmos intervalos de tempo Δt cada vez menores. Dessa forma, estamos assegurando que, à medida que reduzimos o intervalo Δt, não exista diferença entre t_2 e t_1. Portanto, ao tomarmos o limite no qual o intervalo de tempo Δt tende a zero, estaremos falando de um só instante de tempo.

Definimos, portanto, a velocidade instantânea através do processo limite:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad 3.7$$

Num certo número de casos, é relativamente simples calcular a velocidade instantânea. Queremos determinar a velocidade no instante de tempo t. Assim, calculamos a **velocidade média** entre os instantes $t_1 = t$ e $t_2 = t + \Delta t$:

$$\bar{v} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \qquad 3.8$$

e depois, tomando o limite quando Δt tende a zero obtemos a velocidade instantânea:

$$v(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \qquad 3.9$$

Pode-se perceber que, quando Δt tende a zero, o mesmo ocorre para Δs. Isso assegura que, ao tomarmos o limite de Δt tendendo a zero, obtemos um resultado bem definido para v.

O processo-limite definido acima tem o nome de **derivada da função *s*(*t*)** com respeito ao tempo, e se representa:

$$\boxed{v(t) = \frac{ds(t)}{dt}} \qquad 3.10$$

Assim, conhecida a equação horária dos espaços ($s = s(t)$), a equação horária da velocidade ($v = v(t)$) pode ser obtida mediante a derivada do espaço s em relação ao tempo.

A unidade de velocidade depende das unidades adotadas para o espaço e para o tempo. No SI (Sistema Internacional de Unidades) a unidade de velocidade é m/s.

- Exemplo 4

Considere um movimento uniforme cuja equação horária do espaço é dada por:

$$s(t) = 20 - 5t$$

A variável independente, t, será expressa em segundos (s) ao passo que a variável dependente, o espaço (s), será expressa na unidade metro (m).

Determinar:

a. A velocidade média entre os instantes $t = 0$ e $t = 10$ s.

b. A velocidade escalar instantânea nos instantes $t = 1$ s e $t = 4$ s.

c. Os gráficos cartesianos do espaço e da velocidade.

→ Resolução:

a. Velocidade média

A velocidade média é dada pelo quociente dos espaços e intervalos de tempo correspondentes, ou seja:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(10) - s(0)}{10 - 0}$$

Levando-se em conta a equação horária, obtemos que os espaços nesses instantes de tempo são dados por

$$s(10) = 20 - 5(10) = -30$$
$$s(0) = 20 - 5(0) = 20$$

Portanto, de **3.8**, concluímos que:

$$\bar{v} = \frac{-30 - 20}{10} = -5 \quad (\text{m/s})$$

Quando a velocidade for negativa, como nesse exemplo, o movimento é retrógrado.

b. Velocidade instantânea

A velocidade instantânea pode ser obtida por meio da derivada de primeira ordem do espaço em função tempo. Assim,

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d(20 - 5t)}{dt} = \frac{d(-5t)}{dt} = -5 \text{ m/s}$$

O sinal negativo indica que o movimento é retrógrado. Ademais, nos instantes $t = 1$ s, $t = 4$ s ou qualquer outro, a velocidade escalar instantânea da partícula é a mesma.

c. Gráficos das equações horárias

Os gráficos das equações horárias dos espaços e das velocidades são, respectivamente, os **Gráficos 3.2** e **3.3**. Quando $s = s(t)$ for uma função polinomial de grau um, como nesse exemplo, o gráfico dos espaços $s(t)$ é retilíneo, característico de movimentos uniformes.

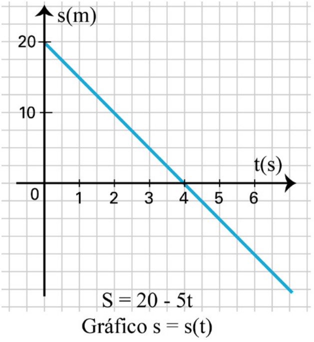

Figura 3.2 Gráfico dos espaços como função do tempo.

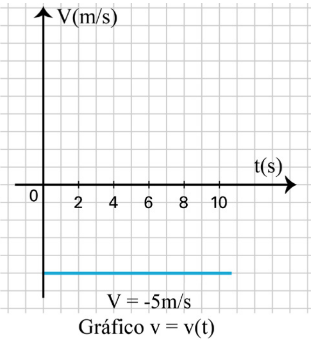

Figura 3.3 Gráfico das velocidades como função do tempo.

• Exemplo 5

O **Gráfico 3.4**, descrevendo o movimento de uma partícula, representa o comportamento da coordenada espaço como função do tempo. A partir desse dado,

a. Escreva a equação horária dos espaços.

b. Determine a equação horária da velocidade escalar instantânea.

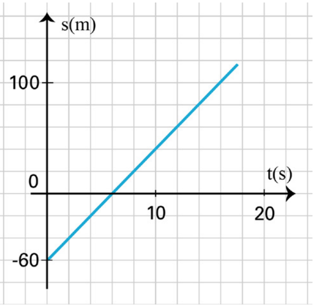

Gráfico 3.4: Gráfico típico de um movimento uniforme.

→ Resolução:

a. Como o gráfico $s = s(t)$ é retilíneo, constatamos que se trata de uma função polinomial do primeiro grau. Escrevemos assim, com bastante generalidade:

$$s(t) = vt + s_0$$

onde s_0 é o coeficiente linear (valor de s para $t = 0$) e v é o coeficiente angular.

O coeficiente linear é determinado pelo valor de s quando a reta cruza o eixo dos espaços $s(0)$. Do gráfico inferimos que

$$s(0) = -60 \text{ m}.$$

O coeficiente angular pode ser obtido a partir de dois valores quaisquer do tempo. No caso em apreço consideramos os instantes de tempo 10 s e 16 s. Os valores dos espaços correspondentes são (de acordo com o **Gráfico 3.5**), respectivamente, $s(10) = 40$ m e $s(16) = 100$ m. Assim, inferimos dos dados acima que

$$v = \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(16) - s(10)}{16 - 10} = \frac{60}{6} = 10 \text{ m/s}$$

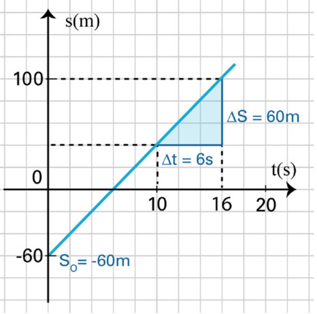

Gráfico 3.5: Coeficientes linear e angular.

Portanto, a equação horária do movimento é:

$$s(t) = 10t - 60$$

• Exemplo 6

Numa competição de Motocross concentramos nossa atenção em duas motos, designadas por A e B. Num determinado instante de tempo, o instante inicial (o qual adotamos como $t = 0$), constatamos que a moto A se encontra num ponto cuja coordenada espaço é $S_A = 20$ m e com velocidade escalar de 4 m/s. No mesmo instante, a moto B atinge um ponto cuja coordenada é $S_B = -20$ m e tem velocidade de 8 m/s.

Admitindo-se que as motos mantenham as suas velocidades instantâneas iguais àquelas do instante de tempo inicial, determine:

a. As equações horárias das posições de cada moto.

b. A distância entre as duas motos nos instantes $t = 2$ s e $t = 12$ s.

c. A posição (e o respectivo instante de tempo) na qual a moto B ultrapassa a moto A. Indicar essa situação num gráfico cartesiano.

→ Resolução:

a. Equações horárias

Considerando-se que a velocidade escalar não muda com o tempo, as equações dos espaços para cada um dos móveis é uma função polinomial. Escrevemos, nesse caso:

$$S_A(t) = 20 + 4t$$

$$S_B(t) = -20 + 8t$$

b. A distância nos instantes t = 2 s e t = 12 s.

De acordo com a expressão **3.2**, a distância entre as duas motos como função de tempo será dada por:

$$d(t) = \left|S_B(t) - S_A(t)\right| = \left|-20 + 8t - (20 + 4t)\right| = \left|-40 + 4t\right|$$

Donde obtemos, para o instante de tempo t = 2 s:

$$d(t=2) = \left|S_B(t=2) - S_A(t=2)\right| = \left|-40 + 4(2)\right| = \left|-32\right| = 32$$

Da expressão acima, concluímos que a distância entre elas é de 32 m. Para t = 12 s, obtemos

$$d(t=12) = \left|S_B(t=12) - S_A(t=12)\right| = \left|-40 + 4(22)\right| = \left|8\right| = 8$$

ou seja, nesse instante a distância é de 8 metros, com a moto B à frente da moto A.

c. Instante da ultrapassagem.

O momento da ultrapassagem ocorre quando os espaços das motos se igualam. Escrevemos assim:

$$S_B(t) = S_A(t)$$

o que nos leva à igualdade:

$$20 + 4t = -20 + 8t.$$

Essa igualdade é válida para t = 10 s. Assim, para instantes anteriores a 10 segundos (t < 10 s), a moto A estará à frente da moto B, ao passo que, para instantes de tempo superiores a esse instante, a moto B estará à frente da moto A.

Essa análise é facilitada mediante o uso dos gráficos dos espaços de cada moto. Para tanto, veja o **Gráfico 3.6**.

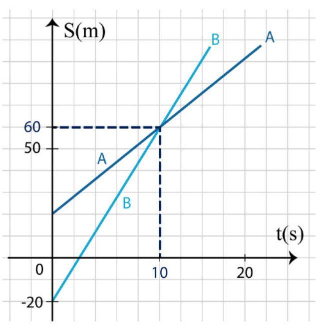

Gráfico 3.6: Gráfico dos espaços como função do tempo e o momento da ultrapassagem.

3.8 Aceleração Escalar

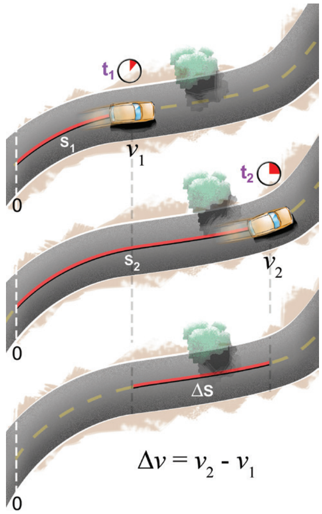

Figura 3.15: Variação da velocidade e tempo decorrido.

Se a velocidade de um objeto varia com o tempo, diz-se que ele tem **aceleração**. Se a velocidade é constante (isto é, não varia com o tempo), a sua aceleração é nula.

Supondo que, no instante t_1, a partícula tenha velocidade v_1, e no instante t_2 tenha velocidade v_2, definimos a **aceleração escalar média**, representada por $\overline{a}$, como o quociente entre a variação de velocidade (Δv) e o intervalo de tempo decorrido (Δt):

$$\boxed{\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}} \quad 3.11$$

onde Δv é a diferença de velocidades da partícula nos instantes t_2 e t_1, isto é:

$$\Delta v = v_2 - v_1 \quad 3.12$$

De importância maior do que a aceleração média é a aceleração instantânea. Como o nome indica, o interesse é a obtenção da aceleração num determinado instante de tempo. A maneira de defini-la, a partir da aceleração média, é tomarmos intervalos de tempo cada vez menores, isto é, tomarmos o limite em que o intervalo se aproxima de zero. Essa é a situação na qual t_2 é muito próximo de t_1. Definimos, portanto, a **aceleração escalar instantânea** através do processo-limite:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad 3.13$$

Devemos determinar a aceleração instantânea a partir da velocidade instantânea $v(t)$, calculando primeiramente a aceleração média entre os instantes $t + \Delta t$ e t, a qual escrevemos como:

$$\overline{a} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \quad 3.14$$

e, a partir daqui, tomando o limite quando $\Delta t \to 0$, obtemos:

$$\bar{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \tag{3.15}$$

Esse processo-limite define a função derivada da velocidade escalar com respeito ao tempo, a qual representamos assim:

$$\boxed{a(t) = \frac{dv}{dt}} \tag{3.16}$$

A aceleração corresponde, assim, à derivada de primeira ordem da velocidade em relação ao tempo.

- Exemplo 7

O movimento de uma partícula ao longo de uma curva predeterminada é regido pela seguinte equação horária

$$s = 5 - 10t + 2t^2$$

Adotando-se as unidades do SI, e a partir desse dado:

a. Determine a equação horária da velocidade.

b. A partir do item anterior, determine a equação horária da aceleração.

c. Esboce os gráficos cartesianos da posição e da velocidade.

→ Resolução:

a. Velocidade Instantânea

A velocidade instantânea, ou velocidade num determinado instante de tempo, é a taxa de variação instantânea da coordenada espaço. Neste caso, temos

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(5 - 10t + 2t^2\right) = \frac{d}{dt}(5) + \frac{d}{dt}(-10t) + \frac{d}{dt}\left(2t^2\right) =$$
$$= 0 + (-10) + 4t = -10 + 4t$$

Donde inferimos que

$$v(t) = 4t - 10$$

b. A aceleração instantânea é obtida como a derivada da velocidade escalar. Obtemos:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-10 + 4t) = \frac{d}{dt}(-10) + \frac{d}{dt}(4t) = 0 + 4$$

Portanto, no SI, a aceleração da partícula é constante e dada por:

$$a = 4 \text{ m/s}^2$$

c. Gráficos de $s = s(t)$ e $v = v(t)$.
Os **Gráficos 3.6** e **3.7** ilustram melhor a dependência da coordenada espaço e da velocidade escalar em relação ao tempo.

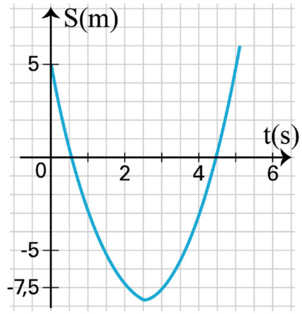

Gráfico 3.6: Coordenada espaço da partícula.

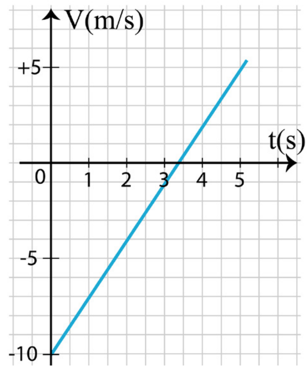

Gráfico 3.7: Velocidade da partícula.

O gráfico do espaço é uma parábola, pois $s = 5 - 10t + 2t^2$ é uma função polinomial de grau dois em relação ao tempo t. A sua derivada em relação ao tempo resulta uma polinomial de grau um. A aceleração do movimento (a = 4 m/s) é constante.

• Exemplo 8
Quando o movimento for retilíneo, utilizamos apenas uma coordenada cartesiana para descrevê-lo. Se uma partícula se move ao longo do eixo y, a equação horária é da forma

$$y = y(t).$$

Considere uma partícula movendo-se na direção vertical, em movimento retilíneo, de tal forma que a equação horária é dada por:

$$y = t^3 - 7{,}5t^2 + 12t$$

Considerando-se todos os dados no sistema SI, determine o intervalo de tempo para o qual o movimento é retrógrado.

→ Resolução:
O movimento é retrógado naqueles intervalos de tempo para os quais a velocidade escalar do móvel é negativa. Nessas circunstâncias, a coordenada espaço decrescerá em tempo.
Consideramos primeiramente a velocidade como função de tempo. Ela pode ser obtida a partir da derivada do espaço como função do tempo.
Nesse caso específico obtemos:

$$v_y \equiv \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^3 - 7{,}5t^2 + 12t\right) = 3t^2 - 15t + 12$$

A condição $v_y(t) < 0$, válida para os intervalos de tempo nos quais a coordenada decresce (movimento retrógrado), leva-nos à inequação

$$3t^2 - 15t + 12 < 0$$

Nos instantes para os quais a velocidade é positiva, válida para os instantes nos quais a coordenada cresce com o tempo (movimento), são aqueles que satisfazem a inequação:

$$3t^2 - 15t + 12 > 0$$

Assim, para determinar os tempos para os quais a velocidade muda de sinal (onde a partícula "para" instantaneamente), devemos encontrar as raízes da equação

$$3t^2 - 15t + 12 = 0$$

As raízes dessa função são os tempos

$$t = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4(3)(12)}}{2(3)} = \frac{15 \pm \sqrt{81}}{6} = \frac{15 \pm 9}{6}$$

cujos valores são $t' = 1$ s e $t'' = 4$ s. Os tempos nesse intervalo têm movimento retrógrado, pois nesse intervalo a velocidade do móvel é negativa. O **Gráfico 3.9** fornece a velocidade. Nele indicamos os pontos nos quais o gráfico da função $v = 3t^2 - 15t + 12$ (que é uma parábola) cruza o eixo da variável independente t.

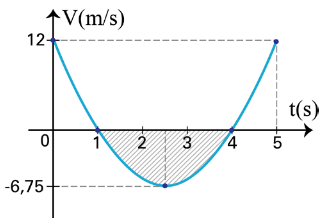

Gráfico 3.9: A parte hachurada do gráfico mostra o intervalo no qual a velocidade é negativa e o movimento, retrógrado.

• Exemplo 9

A velocidade do som no ar é de cerca de 340 m/s. Duas pessoas conversam separadas a uma distância recíproca de 13,6 cm. Qual o intervalo de tempo decorrido entre a produção de um som por um dos interlocutores e sua percepção pelo outro?

→ Resolução:

Nesse caso, considerando o instante $t = 0$ como aquele no qual ocorre a produção do som por um dos interlocutores; assim, a equação horária do espaço associado à propagação do som, é:

$$s = 340.t$$

Para um espaço percorrido, tal que $s = 13,6$ m, que indica a posição do outro interlocutor, temos:

$$13,6 = 340t$$

Donde inferimos que o som chega ao segundo interlocutor depois de decorridos

$$t = (13,6 \text{ m})/(340 \text{ m/s}) = 0,04 \text{ s}.$$

• Exemplo 10

Uma esfera é abandonada do topo de um plano inclinado (o ponto A da **Figura 3.16**) e constatamos que depois de 0,6 s ela atinge a parte mais baixa desse plano (o ponto B indicado na **Figura 3.16**).

Constata-se que o movimento da esfera é uniformemente variado (ou seja, tem aceleração constante). Se AB = 0,72 m, determine:

a. a aceleração da esfera.

b. a velocidade com que a esfera atinge B.

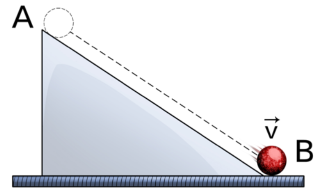

Figura 3.16: Esfera rolando em um plano inclinado.

→ Resolução:

Num movimento uniformemente variado a equação horária da coordenada espaço é, genericamente, $s = s_0 + v_0t + (at^2)/2$, onde s_0 e v_0 se referem ao instante $t = 0$. Vamos considerar a origem dos espaços coindidindo com o ponto A, no qual a esfera é solta (em repouso), no instante $t = 0$. De acordo com esses dados, s_0 e v_0 são nulos. Logo, a equação horária do espaço do movimento da esfera plano abaixo é

$$s = \frac{at^2}{2}.$$

Sabemos que para $t = 0,6$ s a esfera atinge o ponto B que se situa a 0,72 m de A. Logo,

$$a/2 = s/t^2 = 0,72 \text{ m}/(0,6 \text{ s})^2 = 0,72 \text{ m}/0,36 \text{ s}^2 = 2 \text{ m/s}^2.$$

Donde inferimos que a aceleração é dada por $a = 4$ m/s².

A derivada , em relação ao tempo, da equação horária do espaço, é a velocidade, ou seja, $v = \frac{d}{dt}\left(\frac{at^2}{2}\right) = (a)t$; como $a = 4$ m/s², inferimos que

$$v = 4t.$$

Como a esfera atinge o ponto B no instante $t_B = 0,6$ s, concluímos que sua velocidade nesse ponto é:

$$v_B = 4(0,6) = 2,4 \text{ m/s}.$$

3.9 Conclusão

A descrição completa do movimento de uma partícula ao longo de uma curva requer, em princípio, a determinação de três grandezas cinemáticas como função de tempo:

- a coordenada espaço,
- a velocidade escalar e
- a aceleração escalar.

$$S(t)$$
$$v(t)$$
$$a(t)$$

Às expressões acima damos o nome de equações horárias ou funções horárias.

O cálculo diferencial nos permite determinar duas delas, a velocidade e a aceleração, a partir do conhecimento da coordenada espaço. Por exemplo, conhecida a coordenada espaço, podemos determinar a velocidade escalar a partir da derivada da função $S(t)$:

$$v(t) = \frac{d}{dt}\big(S(t)\big)$$

A aceleração escalar é determinada a partir da derivada da velocidade escalar.

$$a(t) = \frac{d}{dt}\big(v(t)\big)$$

Consideramos agora o caso mais interessante e usual em que a aceleração é conhecida. Nesse caso, a velocidade é determinada por uma integral. Assim, a velocidade no instante t, uma vez conhecida a velocidade no instante t_0, é dada pela integral:

$$v(t) = v(t_0) + \int_0^t a(t')dt'$$

A partir da velocidade, podemos determinar a equação horária dos espaços.

$$S(t) = S(t_0) + \int_0^t v(t')dt'$$

onde $S(t_0)$ é o espaço no instante de tempo t_0.

Agora é sua vez...

Acesse o Ambiente Virtual de Aprendizagem e realize a(s) atividade(s) proposta(s).