7 AS LEIS DE NEWTON

Gil da Costa Marques

7.1 A Dinâmica do Movimento

Durante muitos séculos, a dinâmica aristotélica reinou absoluta. Em seu livro *Sobre os Céus*, Aristóteles classifica o movimento em duas categorias: "naturais" e " não naturais" (ou violentos). Todos os corpos estão sujeitos aos movimentos naturais, uma vez que tais movimentos são aqueles em que os objetos caem em direção ao centro da Terra. Seriam aqueles associados ao que hoje denominamos força gravitacional. Os movimentos não naturais são todos os demais, sendo, portanto, muito mais diversificados.

Quais são os agentes provocadores (ou causas) do movimento?

Aristóteles desenvolveu uma teoria dinâmica, baseada em diferentes argumentos, para explicar cada um dos dois tipos de movimento. A queda dos objetos em direção à Terra ocorreria porque afinal, de acordo com ele, todas as coisas procuram um "lugar natural". E esse lugar seria o centro da Terra, pois esse ponto seria o centro do Universo. Os movimentos não naturais seriam explicados como efeito da substituição do espaço atrás do objeto que se move pela matéria no seu entorno. E esta seria reposta por aquela que estava à frente desse objeto. Em resumo, ela é baseada na ideia de que a matéria tem horror ao vácuo.

Essa percepção ingênua das causas do movimento durou quase dois mil anos. Credita-se a William de Ockham (1300-1350) o mérito de ter sido o primeiro escolástico a formular propostas sugerindo uma alteração nos conceitos aristotélicos. Não se tratava exatamente de uma crítica (que, certamente, não viria de um escolástico), mas de se perguntar se não haveria um agente responsável pelo movimento. Não deu, no entanto, uma sugestão para o que seria esse agente.

Galileu foi, certamente, mais objetivo na crítica e no desmonte da dinâmica aristotélica, pois oferecia uma explicação simples e previsível do movimento dos projéteis. Além disso, sugeria que os movimentos de queda dos objetos teriam, sim, uma causa. Como veremos num trecho da obra de Galileu, ele atribui a "causas externas" os movimentos retardados e acelerados.

O trabalho iniciado por Galileu acabou sendo finalizado por Isaac Newton. Sua dinâmica é baseada em três leis do movimento, e esse é nosso tema.


Figura 7.1: Galileu e Newton.

7.2 Os *Principia*

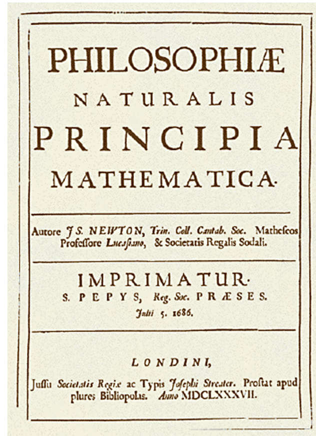
PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.
Autore J. S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.
LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Figura 7.2: Capa dos *Principia*.

Ao publicar a sua obra revolucionária, um livro conhecido hoje apenas como os *Principia*, Newton apresentou sua formulação das leis que regem a dinâmica do movimento. Essa dinâmica é baseada em três leis. Quer consideremos essas leis ou a Teoria da gravitação, o fato é que, ao lançar suas ideias, Newton provocou a maior revolução no conhecimento científico de que se dispunha até o século XVII. Suas leis continuam válidas. No entanto, hoje entendemos que sua validade é restrita a movimentos cuja velocidade seja muito menor do que a velocidade da luz. Assim, essas leis se aplicam à descrição dos movimentos corriqueiros. Sob esse aspecto, ela não perdeu sua atualidade.

Ao enunciar suas Leis, Newton faz uso de algumas definições, como a daquela que denominamos massa. Definiu com clareza o conceito de força, bem como de outras grandezas físicas. De acordo com Newton:

> "Uma força impressa é uma ação exercida sobre um corpo a fim de mudar o seu estado, seja de repouso, ou de se mover uniformemente para adiante numa linha reta."

Além dessa compreensão do que seja força, Newton procurou fazer com que a ideia de ação à distância parecesse aceitável. Ainda de acordo com Newton,

> "Uma força imprimida consiste somente na ação; e não mais permanece no corpo quando a ação termina. Pois um corpo mantém todo novo estado que adquire, somente por sua *vis inertiae*."

Newton deu-se conta ainda de que existe uma enorme variedade de forças, as quais ele identificara de uma forma diferente daquela apresentada antes: "As forças imprimidas têm origens diferentes; como percussão, pressão, força centrípeta."

Ao formular suas leis, ele se deu conta da necessidade de introduzir um conceito fundamental com a máxima precisão possível. Esse conceito é o de massa, definida por ele como:

> "A quantidade de matéria é a medida da mesma, resultando da densidade e do volume conjuntamente."

7.3 Lei da inércia

No cotidiano, atribuímos o termo inércia para algo que tem aversão a mudanças. Esse é também o sentido do termo quando nos referimos ao movimento. Assim, um objeto em repouso tende naturalmente a permanecer em repouso, e um objeto com velocidade constante tende a manter a sua velocidade constante. Essa tendência natural de tudo permanecer como está é conhecida, na Mecânica, como inércia e esse comportamento da natureza levou Newton a enunciar a Lei que recebe esse nome (a lei da Inércia), cujo enunciado é o seguinte:

> "Qualquer corpo em movimento retilíneo e uniforme (ou em repouso) tende a manter-se em movimento retilíneo e uniforme (ou em repouso)."

É bom lembrar, no entanto, que, historicamente, a lei da Inércia foi formulada por Galileu. De acordo com ele, não havendo causas para alterar o estado de movimento, um corpo teria uma velocidade constante, perpetuamente. Em suas palavras:

> "a velocidade, uma vez imprimida a um corpo, será mantida enquanto estiverem removidas as causas externas de aceleração ou retardamento, condição essa que só é encontrada nos planos horizontais; porque, no caso dos planos em declive, já está presente uma causa de aceleração, enquanto nos planos em aclive há um retardamento; segue-se daí que o movimento em um plano horizontal é perpétuo; pois, se a velocidade for uniforme, não poderá ser diminuída ou retardada e muito menos destruída."

Aqui é importante chamar a atenção para o fato de que conceituar o movimento como uniforme depende do sistema de referência.

Figura 7.3: Resultado da inércia.

O exemplo mais simples, do ponto de vista da observação da inércia dos corpos, é o dos passageiros num veículo.

Quando o veículo é brecado, os passageiros tendem a manter-se no seu estado de movimento. Por isso, as pessoas "vão para frente" quando o veículo é brecado. Na realidade, a mudança do estado de movimento é apenas do ônibus. Os passageiros simplesmente tendem a manter-se como estavam. Da inércia resultam os ferimentos em acidentes no tráfego.

Figura 7.4: Consequência da inércia.

O princípio da inércia permite entender por que as pessoas se ferem em acidentes automobilísticos. Conquanto os carros tenham suas velocidades reduzidas pela colisão, a tendência das pessoas é manterem-se em movimento. Daí resulta os corpos serem jogados contra o para-brisa ou outras partes do carro. O uso do cinto de segurança tenta minimizar o efeito, fixando as pessoas ao veículo.

Pode-se tirar proveito da inércia.
O exemplo mais simples é o encaixe do martelo batendo com o cabo contra a mesa.
Uma vez em movimento, o martelo tenderá a manter-se em movimento, facilitando o encaixe.

Figura 7.5: A inércia pode ser útil.

7.4 A Segunda Lei de Newton

A segunda lei de Newton é a lei fundamental da Mecânica. A partir dela, e por meio do uso de métodos matemáticos, podemos fazer previsões (velocidade e posição, por exemplo) sobre o movimento dos corpos. Qualquer alteração da velocidade de uma partícula é atribuída, sempre, a um agente denominado **Força**. Basicamente, o que produz mudanças na velocidade são forças que agem sobre a partícula. Como a variação de velocidade indica a existência de aceleração, é de se esperar que haja uma relação entre a força e a aceleração. De fato, Sir Isaac Newton percebeu que existe uma relação muito simples entre força e aceleração, isto é, a força $\vec{F}$ é sempre diretamente proporcional à aceleração $\vec{a}$ que ela provoca.

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{7.1}$$

onde o coeficiente m é a massa da partícula, definida por Newton como algo associado à quantidade de matéria contida num corpo.

Esta relação simples entre força e aceleração é conhecida como a 2ª lei de Newton. No enunciado da lei de Newton, $\vec{F}$ pode representar uma única força e/ou a força que resulta da soma de um conjunto de forças.

A massa definida acima recebe o nome de massa inercial. Ela dá uma medida da dificuldade de alterarmos a velocidade de uma partícula e isso porque a segunda lei de Newton pode ser escrita como:

$$m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{1}{m}\vec{F} \tag{7.2}$$

E, portanto, quanto maior a massa de um corpo, tanto menor será a sua variação de velocidade.

Sendo que todo objeto sobre a superfície terrestre fica sujeito a forças, devemos entender que aqueles em repouso têm uma força resultante nula agindo sobre eles.

Dessa lei depreendemos que forças são necessárias tanto para colocarmos um objeto em movimento quanto para trazê-lo ao estado de repouso.

A melhor forma de escrevermos a equação de movimento, pois é nessa forma que ela é entendida como mais útil na resolução dos problemas de mecânica, é:

$$\boxed{m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right) \equiv m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}} \tag{7.3}$$

Tendo em vista a equação acima, concluímos que a segunda lei de Newton resulta ser uma equação para determinar o vetor posição em qualquer instante de tempo (uma equação diferencial de segunda ordem no tempo).

A partir da segunda lei e através de métodos matemáticos, podemos fazer previsões (velocidade e posição, por exemplo) sobre o movimento dos corpos em cada instante de tempo.

No enunciado da lei de Newton, o termo tanto pode representar uma força única quanto a que resulta da soma de um conjunto de forças. No caso em que mais de uma força atua sobre uma partícula, a lei de Newton deve ser escrita como:

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{(i)} \tag{7.4}$$

onde $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{(i)}$ indica a soma ou somatória das forças que atuam sobre o objeto; e ela é igual à massa vezes a aceleração do objeto.

Sendo a força uma grandeza vetorial, o mesmo acontecendo com a aceleração, podemos escrever a lei de Newton em componentes. Por exemplo, utilizando coordenadas cartesianas, a lei de Newton se escreve:

$$ma_x = F_x \qquad ma_y = F_y \qquad ma_z = F_z \tag{7.5}$$

Exemplos

- Exemplo 01:

Dois carrinhos de supermercado – A e B – encontram-se em repouso num piso horizontal. O carrinho A, vazio, tem massa m = 20 kg; o carrinho B, com mercadorias, tem massa total 80 kg.

Considere o caso em que uma força horizontal constante e de módulo $|\vec{F}|$= 100 (N) é aplicada em cada um dos carrinhos, empurrando-os para frente (direção tomada como a do eixo $0x$). Dado que essa força, conforme mostra a **Figura 7.6**, é aplicada com duração tal que o intervalo de tempo é Δt = 0,1 s, determinar, admitindo nulos os atritos nas rodinhas:

a. a aceleração resultante em cada carrinho

b. a velocidade de cada carrinho após a impulsão inicial

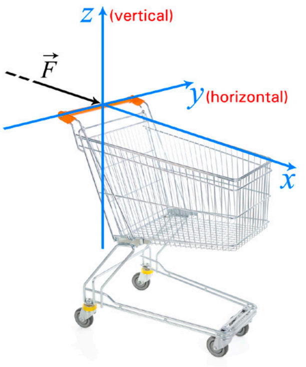

Figura 7.6 Carrinho de compras.

→ Resolução

Independentemente da força $\vec{F}$, duas outras forças agem sobre cada um dos carrinhos: a força peso ($\vec{P}$) e a força de reação normal ($\vec{N}$) resultante da ação do piso sobre as rodas do carrinho.

Os DCLs abaixo representam os carrinhos miniaturizados e as forças aplicadas.

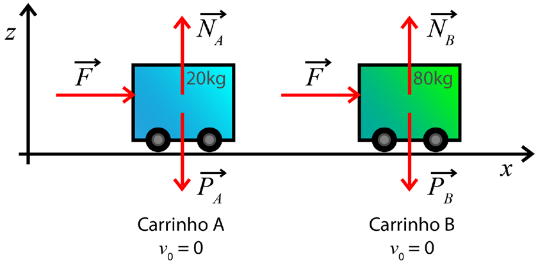

Figura 7.7: DCLs dos carrinhos.

Aplicando a 2ª Lei de Newton para qualquer um dos carrinhos, escrevemos:

$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = m \cdot \vec{a} \tag{7.6}$$

Em termos de componentes:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= P_x + N_x + F_x = m \cdot a_x \quad \text{(I)} \\ \sum F_y &= P_y + N_y + F_y = m \cdot a_y \quad \text{(II)} \\ \sum F_z &= P_z + N_z + F_z = m \cdot a_z \quad \text{(III)} \end{aligned} \tag{7.7}$$

Podemos sempre escolher um referencial cartesiano de tal forma que o eixo $0x$ esteja na mesma direção e mesmo sentido da força $\vec{F}$ (veja o DCL). Para essa escolha de referencial, temos $F_z = F_y = 0$ e $F_x = F$ (onde F é a intensidade de $\vec{F}$). As forças $\vec{N}$ e $\vec{P}$ só têm componentes não nulas ao longo do eixo z. Portanto, $P_x = P_y = 0$ e $N_x = N_y = 0$, ao passo que $P_z = -P$ e $N_z = N$.

Substituindo esses valores nas equações **(I)**, **(II)** e **(III)**, encontramos:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 + 0 + F = m \cdot a_x \rightarrow +F = m \cdot a_x \quad \text{(IV)} \\ \sum F_y &= 0 + 0 + 0 = m \cdot a_y \rightarrow 0 = m \cdot a_y \quad \text{(V)} \\ \sum F_z &= -P + N + 0 = m \cdot a_z \rightarrow -P + N = m \cdot a_z \quad \text{(VI)} \end{aligned} \tag{7.8}$$

Não ocorre movimento na direção do eixo $0z$ (os carrinhos estão em equilíbrio na direção vertical); logo, nessa direção, a aceleração é nula, ou seja, $a_z = 0$. Nessas condições, inferimos da equação **(VI)**:

$$-P + N = 0 \Rightarrow N = P \tag{7.9}$$

a. A aceleração de cada carrinho, em virtude da ação da força $\vec{F}$, é obtida da equação **(IV)**:
Para o carrinho B, mais pesado, obtemos para sua aceleração:

$$100 \text{ newtons} = (80 \text{ kg})\cdot a_x \to a_x = (100 \text{ N})/(80 \text{ kg}) = 1{,}25 \text{ m/s}^2$$

Enquanto, para o carrinho A, temos:

$$100 \text{ newtons} = (20 \text{ kg})\cdot a_x \to a_x = (100 \text{ N})/(2 \text{ kg}) = 5 \text{ m/s}^2$$

b. Enquanto perdurar a ação da força $\vec{F}$, as acelerações dos carrinhos são constantes; portanto, a equação da velocidade de cada carrinho é da forma: $v_x = v_{0x} + a_x t$, onde $v_{0x} = 0$.

Equação horária da velocidade de cada carrinho	
Carrinho A	**Carrinho B**
$v_{Ax}(t) = 5t$ para $(0 < t \leq 0{,}1 \text{ s})$	$V_{Bx}(t) = 1{,}25t$ para $(0 < t \leq 0{,}1\text{s})$

Ao cabo de 0,1 s (tempo que dura a ação de $\vec{F}$), a velocidade de cada carrinho é dada por:

- Carro B:

$$v_{Bx}(t = 0{,}1) = 0 + 1{,}25(0{,}1) = 0{,}125 \text{ m/s}$$

- Carro A:

$$v_{Ax}(t = 0{,}1) = 0 + 5(0{,}1) = 0{,}5 \text{ m/s}$$

Conclusão: Forças de mesma intensidade aplicadas em diferentes corpos produzirão, se exercidas isoladamente, acelerações inversamente proporcionais às respectivas massas. Quanto maior for a massa do corpo, tanto menor será sua aceleração.

A lei de Newton pode ser escrita ainda, em coordenadas cartesianas, como derivadas segundas em relação ao tempo das coordenadas:

$$\boxed{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z \end{aligned}} \qquad 7.10$$

Observa-se, assim, que as leis de Newton levam a um conjunto de 3 equações de movimento (no caso tridimensional) ou a um conjunto de 2 equações (no caso bidimensional), ou seja, uma equação para cada componente.

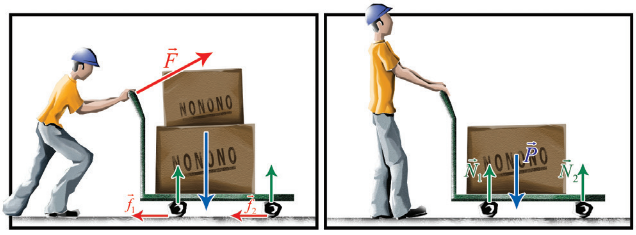

Figura 7.8: Forças sobre um carrinho em movimento e em repouso.
$\vec{F}$ = força aplicada pelo operador;
$\vec{P}$ = peso do sistema (caixas + carrinho);
$\vec{N}_1$ e $\vec{N}_2$ reações normais do piso sobre as rodas;
$\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$ = forças de atrito.

Num problema típico de mecânica, estamos interessados na determinação da posição e velocidade de uma partícula a partir das forças imprimidas ao objeto. O problema torna-se, assim, o de descobrir qual a função que, quando derivada, é igual à componente da força dividida pela massa. A isso corresponde o problema de determinar a velocidade como função do tempo.

O primeiro problema na mecânica consiste, assim, em identificar as forças e, a partir delas, determinar a velocidade e a aceleração da partícula como função do tempo.

- Exemplo 02:

Considere um carrinho com massa total m = 30 kg em repouso no piso horizontal de um supermercado. Ele recebe a ação de uma força impulsiva constante F = 1.100 newtons, cuja duração é Δt = 0,2 s; a sua linha de ação faz com a horizontal um ângulo θ = 37° abaixo da horizontal, conforme ilustra a **Figura 7.9**.

A força de atrito que se opõe ao movimento é constante e tem intensidade f_{at} = 160 newtons. Adotando-se g = 10 m/s²; cos37° = 0,8 e sen37° = 0,6, determine:

Figura 7.9: Movimento do carrinho de compra.

a. a aceleração nos primeiros 0,2 segundos do movimento

b. a velocidade e a distância percorrida pelo carrinho nos primeiros 0,2 s

→ Resolução

Primeiramente, vamos desenhar o DCL do carrinho para os primeiros 0,2 segundos, intervalo no qual atua a força $\vec{F}$.

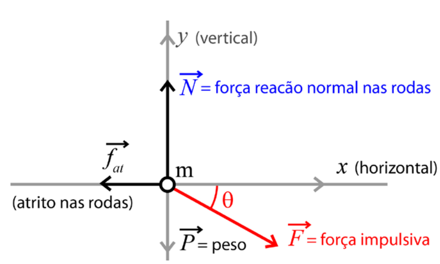

Figura 7.10: DCL - Diagrama esquematizando as forças sobre o carrinho durante os dois primeiros 0,2s.

Admitimos ao esboçar o DCL que:

I. as linhas de ação das forças pertencem a um mesmo plano vertical;

II. o carrinho será considerado como um ponto material de massa m.

a. Determinação da aceleração do carrinho nos primeiros 0,2 s.

De acordo com a 2ª Lei de Newton, aplicada às quatro forças, obtemos as seguintes equações para as componentes dos eixos 0x e 0y:

$$\begin{aligned} m \cdot a_x &= \sum \text{Forças}_x = F_x + P_x + N_x + f_{at_x} = F\cos\theta + 0 + 0 - f_{at} && \text{(I)} \\ m \cdot a_y &= \sum \text{Forças}_y = F_y + P_y + N_y + f_{at_y} = -F\,\text{sen}\,\theta - mg + N + 0 && \text{(II)} \end{aligned} \quad 7.11$$

Substituindo-se os valores dados no enunciado do problema na equação **(I)**, obtemos:

$$(30\text{ kg}) \cdot a_x = (1.100\text{ newtons})\cos 37° - 160\text{ newtons} = 720\text{ newtons}$$

daí inferimos que

$$a_x = \frac{720\text{ newtons}}{30\text{ kg}} = 24\ \text{m/s}^2$$

Tendo em vista a ausência de movimento na vertical, concluímos que $a_y = 0$. Portanto, para $0 \le t \le 0{,}2$ s, a aceleração do carrinho é 24 m/s² na direção horizontal e no sentido da força.

b. Determinação da velocidade e da distância percorrida ao cabo de 0,2 s.

Enquanto a força $\vec{F}$ atuar, a aceleração do carrinho será a_x = 24 m/s². Tendo em vista que, inicialmente, o carrinho se encontrava em repouso (v_{0x} = 0), a componente x da velocidade depende do tempo da seguinte forma:

$$v_x = 24t\ \ (\text{para}\ \ t \le 0{,}2\text{ s})$$

onde a velocidade é expressa em m/s e tempo em segundos. Portanto, ao cabo de 0,2 s, a velocidade do carrinho será: v_x = 4,8 m/s.

Para calcular a distância percorrida, vamos nos valer da equação do espaço x para uma força (ou aceleração) constante:

$$x = x_0 + v_{0x}t + (1/2)at^2 \quad 7.12$$

As condições iniciais (para t = 0) são: $x_0 = 0$ e $v_{0x} = 0$; portanto, a equação do espaço se escreve:

$$x(t) = 0 + 0 \cdot t + (1/2)24t^2 = 12t^2$$

ou seja, para x em metros

$$x(t) = 12t^2$$

Logo, para t = 0,2 s, segue-se da equação acima que $x(0{,}2) = 12(0{,}2)^2 = 0{,}48$ m (48 cm). Nessas condições, a distância percorrida pelo carrinho será de 0,48 m.

7.5 A Terceira Lei de Newton

Como foi dito anteriormente, as forças resultam da interação de um corpo com outro. É de se esperar, portanto, que, se um primeiro corpo exerce uma força sobre outro (chamada de ação), este também experimenta uma força (chamada de reação), que resulta da interação com esse segundo corpo. Newton percebeu não só que isso sempre acontece, mas, indo mais longe, especificou as principais características dessas duas forças resultantes da interação entre dois corpos. Essa questão foi tratada na sua terceira lei, cujo enunciado é:

> "Para toda força que surgir num corpo como resultado da interação com um segundo corpo, deve surgir nesse segundo outra força, chamada de reação, cuja intensidade e direção são as mesmas da primeira, mas cujo sentido é o oposto da primeira."

Desse modo, Newton se deu conta de três características importantes das forças de interação entre dois objetos.

Em primeiro lugar, uma força nunca aparece sozinha. Elas aparecem aos pares (uma delas é chamada ação e a outra, reação). Em segundo lugar, é importante observar que cada uma dessas duas forças atua em objetos distintos. Finalmente, essas forças (aos pares) diferem entre si pelo sentido: elas têm sentido oposto uma da outra.

Observe alguns exemplos do cotidiano:

1. Um patinador encostado a uma parede ganha impulso, isto é, ele se acelera ao "empurrar" a parede com as mãos (**Figura 7.11**). O resultado da reação da parede é uma força que o habilita a qualquer aceleração.

Figura 7.11: Tomando impulso como?

2. Ao empurrarmos um carro colocando-o em movimento, aplicamos uma força sobre ele. A força de reação do carro está no sentido oposto à força aplicada (**Figura 7.12**).

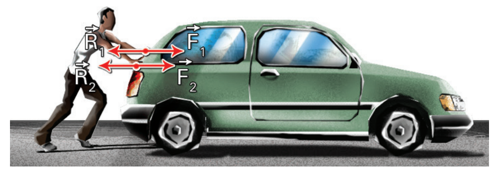

Figura 7.12: Quem empurra quem?

3. Ao chutarmos uma bola, os nossos pés aplicam uma força sobre ela. A força de reação da bola age sobre o pé do jogador (**Figura 7.13**). O pé experimenta um movimento de recuo ou para quase instantaneamente. Experimente chutar uma bola leve e outra pesada para comparar a reação da bola sobre o seu pé.

Figura 7.13: Como a bola reage.

4. Os motoristas usam um pequeno martelo de madeira para testar a pressão dos pneus dos caminhões. Ao bater nos pneus exercemos uma força sobre eles. A força de reação dos pneus faz com que o martelo inverta o sentido do movimento (**Figura 7.14**). O motorista sente o retorno e sabe quando o pneu está bom.

Figura 7.14: Reação da força elástica.

- Exemplo 03:

Uma mola tem uma extremidade fixada num suporte rígido; a outra extremidade é puxada por um garoto.

a. Desenhe as forças de ação e reação na interação "mão-mola".

b. As forças de ação e reação equilibram um corpo?

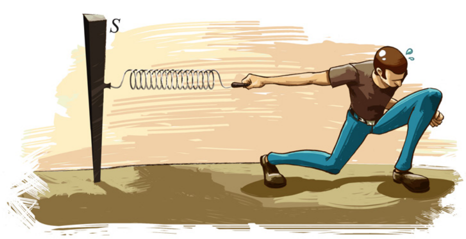

Figura 7.15: Força aplicada sobre a mola.

→ Resolução

a. No esquema da **Figura 7.16**, estão ilustradas as forças de ação (força da mão sobre a mola) e de reação (força da mola sobre a mão), representadas pelos vetores $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, respectivamente.

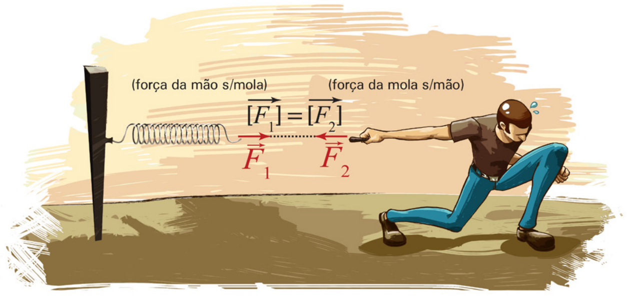

Figura 7.16: Força aplicada sobre a mola e a força de reação aplicada à mão.

b. Essas forças, apesar de possuírem a mesma direção, mesma intensidade e sentidos opostos, não podem ser utilizadas para equilibrar um corpo, pois elas atuam em corpos diferentes.

7.6 Lei de Newton em coordenadas polares

É possível escrever as equações de Newton fazendo uso de outras coordenadas. Isso, no entanto, não é tão simples quanto parece à primeira vista, pois para fazê-lo devemos utilizar um conjunto de vetores de base diferentes daqueles definidos como $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ na secção **4.6**.

Seguindo as ideias de Hermann Weyl sobre o conceito de espaço e da geometria do espaço, introduzimos o conceito de referencial a partir do conceito de vetores. De acordo com Weyl, um referencial é constituído por um ponto O e um conjunto de três vetores denominados vetores da base do referencial.

7.6.1 A Segunda Lei de Newton em coordenadas polares

Podemos escrever as leis de Newton utilizando para isso outros conjuntos de coordenadas.

> **Você lembra?**
> As coordenadas polares são as mais simples e foram definidas em **Outras Coordenadas**.

Levando-se em conta a definição de vetores em coordenadas polares, podemos escrever a força em termos dos versores. Assim, em coordenadas polares, escreve-se a força como:

$$\vec{F} = F_\rho \vec{e}_\rho + F_\varphi \vec{e}_\varphi \quad (7.13)$$

onde F_ρ e F_φ são as componentes polares da força e $\vec{e}_\rho$ e $\vec{e}_\varphi$, os respectivos versores. A essas componentes damos o nome de componente radial e orbital da força.

Levando-se em conta a lei de Newton, escrevemos:

$$\vec{F} = F_\rho \vec{e}_\rho + F_\varphi \vec{e}_\varphi = m\left(a_\rho \vec{e}_\rho + a_\varphi \vec{e}_\varphi\right) \quad (7.14)$$

De **7.13** e **7.14**, resulta que, em termos das componentes em coordenadas polares, escrevemos:

$$\begin{aligned} F_\rho &= m \cdot \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] \\ F_\varphi &= m \cdot \left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right] \end{aligned} \quad (7.15)$$

- Exemplo 04:

I. Determinar a aceleração de uma partícula de massa m em Movimento Circular Uniforme – MCU – de raio R.

II. Qual a força resultante sobre a Lua (massa = M) supondo que ela executa um MCU de raio R e velocidade orbital v?

→ Resolução

I. Aceleração no MCU.

No movimento circular uniforme – MCU –, uma partícula movimenta-se ao longo de uma trajetória circular de raio R com velocidade $\vec{v}$ de tal sorte que o seu módulo ($|\vec{v}| = v$) é constante. O vetor velocidade, por ser sempre tangencial à trajetória, é um vetor perpendicular à direção radial que, com origem no centro, passa pela posição na qual se encontra a partícula.

A Lua, por exemplo, executa um movimento aproximadamente circular e uniforme, cuja órbita circular tem centro coincidente com o da Terra.

O esquema da **Figura 7.17** representa uma partícula em movimento circular uniforme, cuja órbita (trajetória fechada) de raio R está contida no plano β.

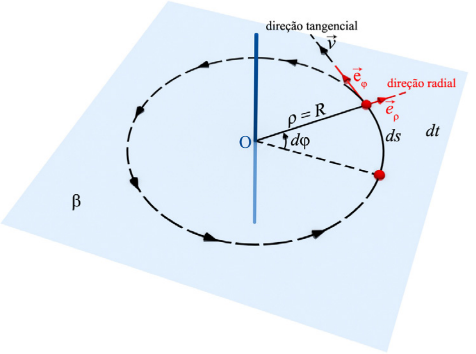

Figura 7.17: $\vec{e}_\rho$ e $\vec{e}_\varphi$ são os versores na direção radial e tangencial à circunferência.

- **Velocidade tangencial ou orbital**

Se no intervalo de tempo infinitesimal dt a partícula percorrer o arco ds (visto ampliado na **Figura 7.17**), a sua velocidade escalar será $v = (ds)/(dt)$; o vetor velocidade $\vec{v}$ será tangencial à circunferência.

- **Velocidade angular**

O vetor com origem no centro e extremidade na partícula (o vetor posição) realiza, durante o mesmo intervalo de tempo, um deslocamento angular $d\varphi$. Define-se $\omega = (d\varphi)/(dt)$ como a velocidade angular da partícula que corresponde à taxa de variação instantânea da variável angular φ.

  - Relação entre v e ω.

  A razão entre o arco (ds) de circunferência e o raio (R) define o ângulo ($d\varphi$) em "radianos" – símbolo: rad – uma unidade de medida derivada do Sistema Internacional de Unidades. Assim, $(ds)/R = d\varphi$, donde $ds = R{\cdot}d\varphi$. Dividindo-se ambos os membros por dt, tem-se o seguinte: $(ds/dt) = R.(d\varphi/dt)$, ou seja,

$$v = \omega R \tag{7.16}$$

Vamos desenvolver agora os passos para a determinação da aceleração de uma partícula em MCU. Vamos usar um sistema de coordenadas polares caracterizadas pelos versores $\vec{e}_\rho$ (na direção radial) e $\vec{e}_\varphi$ (na direção tangencial ou perpendicular à direção radial).

1. O vetor posição que localiza a partícula é $\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho$. No caso do movimento circular $\rho = R$ e, portanto, o vetor posição pode ser expresso como: $\vec{r} = R\vec{e}_\rho$. Apesar de R ser constante, o vetor $\vec{r}$ varia com o tempo em virtude de o versor $\vec{e}_\rho$ mudar de direção à medida que o tempo passa.
2. A velocidade da partícula é dada por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\cdot\vec{e}_\rho\right) = \frac{d(R)}{dt}\vec{e}_\rho + R\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = 0 + R\cdot\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi \tag{7.17}$$

Levando-se em conta que $(d\varphi)/(dt) = \omega$, a velocidade vetorial da partícula é dada pela expressão:

$$\vec{v} = (\omega R)\vec{e}_\varphi \qquad 7.18$$

Lembramos que o versor $\vec{e}_\varphi$ na expressão acima é sempre perpendicular à direção radial, assegurando assim que a direção de $\vec{v}$ será tangencial à circunferência. Essa velocidade é também denominada "velocidade orbital".

3. Apesar de o módulo da velocidade orbital da partícula ser constante, ela muda continuamente de direção. Isso significa que o vetor velocidade $\vec{v}$ no MCU é variável. Portanto, uma partícula em MCU tem aceleração. Vamos calculá-la. Para isso derivamos o vetor velocidade com respeito ao tempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\omega R\vec{e}_\varphi\right) = (\omega R)\frac{d}{dt}\left(\vec{e}_\varphi\right) = (\omega R)\left[-\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\rho\right] = -(\omega R)\,\omega\left[\vec{e}_\rho\right] \qquad 7.19$$

Donde inferimos que a aceleração é dada por:

$$\vec{a} = -\omega^2 R\vec{e}_\rho = -\left[v/R\right]^2 R\vec{e}_\rho = -\left[v^2/R\right]\vec{e}_\rho \qquad 7.20$$

Das expressões acima concluímos que:

1º o módulo da aceleração é $a = \omega^2 R = v^2/R$.

2º a direção da aceleração é radial (direção do versor $\vec{e}_\rho$), ou seja, da reta que passa pelo centro da circunferência e pela partícula;

3º o sinal negativo indica que o vetor $\vec{a}$ é oposto ao versor $\vec{e}_\rho$. Portanto, a aceleração no MCU é um vetor dirigido para o centro da órbita circular. Por isso, essa aceleração é também conhecida como **aceleração centrípeta** (centrípeta → que busca o centro).

II. A força resultante sobre a Lua

A Lua praticamente executa MCU ao redor da Terra. Por possuir MCU, a Lua tem aceleração $\vec{a} = -[v^2/R]\vec{e}_\rho$. Portanto,

$$\vec{F}_{\text{Lua}} = m\cdot\vec{a} = -\left[m\cdot v^2/R\right]\vec{e}_\rho \qquad 7.21$$

Como a Lua percorre uma circunferência de raio R = 384.000 km em T = 27 dias + 8 horas, aproximadamente, a sua velocidade orbital será $v = (2\pi R)/T \cong 1.020$ m/s. Sendo $M = 7{,}35 \times 10^{22}$ kg a massa da Lua, tem-se:

$$\vec{F}_{\text{Lua}} = -\left[m\cdot v^2/R\right]\vec{e}_\rho = -\left[\left(7{,}35\times10^{22}\,\text{kg}\right)\cdot\left(1.020\ \text{m/s}\right)^2/\left(384\times10^6\,\text{m}\right)\right]\vec{e}_\rho$$

$$\vec{F}_{\text{Lua}} \cong -\left[20\times10^{19}\right]\vec{e}_\rho\ \ (\text{newtons})$$

A força resultante $\vec{F}_{\text{Lua}}$ é a força de atração gravitacional que a Terra exerce sobre a Lua. Na sua ausência, a Lua seguiria em movimento retilíneo para o espaço e, de acordo com a lei da inércia, sem forças para influir no seu movimento, mantendo a sua velocidade v = 1.020 m/s.

Podemos prever, portanto, que a força gravitacional exercida pela Lua é atrativa, uma vez que ela aponta para o centro da Terra.

7.7 Comentários sobre as Leis de Newton

7.1 Sobre a Independência das Leis

Veremos a seguir que, para sistemas inerciais, e na ausência de forças, um corpo executa um movimento retilíneo e uniforme. Assim, parece desnecessária a primeira lei, porquanto ela parece ser dedutível da segunda lei.

Ocorre que um movimento simples como o movimento retilíneo e uniforme, quando considerado a partir de um referencial não inercial não é nada simples. Assim, quando analisado de um sistema não inercial como, por exemplo, uma plataforma em rotação, ele é bastante complexo.

Entende-se, portanto, a necessidade do primeiro postulado. Ele define os sistemas inerciais, sistemas esses para os quais um móvel na ausência de forças executa um movimento retilíneo uniforme.

Para sistemas inerciais, definidos pela primeira lei, valem as equações de Newton como apresentadas na segunda lei.

7.2 Sobre as Condições Iniciais

Verifica-se facilmente que a solução mais geral das equações de Newton pode ser escrita sob a forma:

$$r(t) = r'(t) + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \qquad 7.22$$

onde $\vec{r}'(t)$ é uma solução da equação não homogênea tal que:

$$\vec{r}'(t=0) = 0 \;\text{ e }\; \left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_{t=0} = 0 \qquad 7.23$$

Assim, $\vec{r}_0$ e $\vec{v}_0$ são, respectivamente, o vetor posição inicial e o vetor velocidade inicial.

As soluções são expressas, assim, em termos da velocidade e da posição num instante de tempo adotado como o instante inicial. Em geral, denominamos condições iniciais a especificação dessas variáveis num instante de tempo dado.

A solução mais geral da equação de Newton envolve, assim, constantes a serem determinadas a partir das condições iniciais. Sem essas condições, a solução não está completa.

7.3 Mecanicismo

A mecânica newtoniana é determinista, ou seja, uma vez conhecidas as condições iniciais de um sistema, temos como prever o seu comportamento em qualquer instante no futuro.

- Exemplo 05:

Um disco (indicado na **Figura 7.18** pela letra B) tem massa $m = 2$ kg. Ele é posto em MCU de raio $R = 0{,}5$ m sobre uma plataforma horizontal sem atrito, com velocidade escalar constante $v = 1$ m/s. Ele é mantido em trajetória circular devido à força tensora do fio – leve e flexível – em cuja extremidade pende um objeto A, que permanece no mesmo nível acima do solo (nem sobe nem desce). Adotar $g = 10$ m/s².

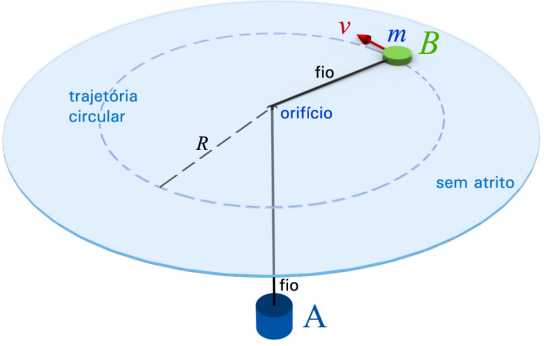

Figura 7.18: Disco B em MCU em cima de uma plataforma horizontal.

a. O que ocorre se o fio se romper?

b. Qual o peso do objeto A?

→ Resolução

a. A **Figura 7.19** ilustra o que ocorre ao movimento do disco com o rompimento do fio.

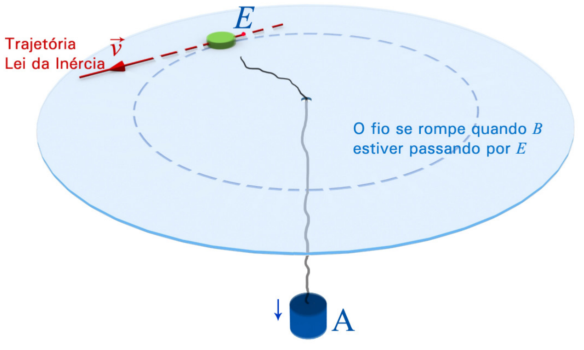

Figura 7.19: Se o fio se rompe, a força centrípeta deixa de existir; o bloco escapa com velocidade constante numa direção tangencial à sua órbita.

Na ausência de força resultante sobre o disco, o seu movimento, conforme a 1ª Lei de Newton, passa a ser MRU (movimento retilíneo uniforme).

b. Para determinar o peso do objeto pendurado na extremidade do fio que pende do centro do disco, devemos aplicar a 2ª Lei de Newton. Para isso, faz-se necessário conhecer as forças que atuam sobre o disco.

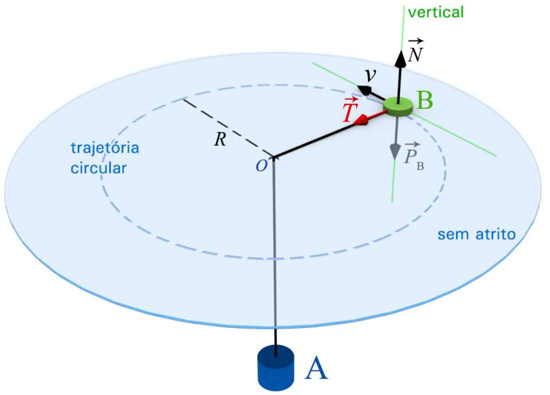

Figura 7.20 DCL do disco. A força normal e o peso se equilibram. A força resultante é a força tensora.

Como o disco B se movimenta sobre a plataforma horizontal, as forças na vertical se equilibram. Nota-se, assim, que a força normal é equilibrada pelo seu peso. Escrevemos $N = P_B$. A força tensora T, por sua vez, é a única força não equilibrada que atua sobre o disco. Escrevemos a força resultante sobre o disco como

$$\sum \vec{F}_{disco} = \vec{T} + \vec{P}_B + \vec{N} = \vec{T} \qquad 7.24$$

onde, como sabemos $\vec{P}_B + \vec{N} = 0$. Assim, aplicando-se a 2ª Lei de Newton, e lembrando o resultado do Exemplo 04, escrevemos **7.25**.

$$\sum \vec{F}_{\text{disco}} = m\vec{a} = -\left(mv^2/R\right)\vec{e}_\rho \quad (7.25)$$

Portanto, a aceleração do disco é a aceleração centrípeta. Sendo, ademais, $\sum \vec{F}_{\text{disco}} = \vec{T}$, podemos escrever:

$$\vec{T} = -\left(mv^2/R\right)\vec{e}_\rho \quad (7.26)$$

Portanto, a força tensora tem as seguintes características:

- Módulo $|\vec{T}| = |-mv^2/R|$, ou seja, $T = mv^2/R = (2\ \text{kg})(1\ \text{m/s})^2/(0{,}5\ \text{m}) = 4\ \text{N}$
- Direção e sentido: direção radial (direção do fio) e sentido, para o centro da circunferência.

Para a determinação do peso do objeto A, lembramos que a força tensora $T = 4$ newtons, e ela é a força transmitida pelo fio. Ela equilibra a força peso exercida pelo objeto A pendurado na extremidade do fio e isso porque o objeto A não sobe nem desce; ele está, portanto, em equilíbrio. Concluímos, dessa condição de equilíbrio, que:

$$T = M_A g = P_A \quad (7.27)$$

Donde obtemos o peso de A = 4 newtons. Sendo $g = 10\ \text{m/s}^2$, sua massa é 0,40 kg.

- Exemplo 06: O canhão de Newton

Se uma pedra for lançada do topo da montanha mais alta do planeta com certa velocidade horizontal, ela desviará de sua trajetória retilínea pela ação da força gravitacional, descrevendo uma trajetória curvilínea.

Quanto maior a velocidade, mais distante ela irá.

Pergunta: Qual deve ser a velocidade mínima de lançamento para que a pedra realize uma volta completa ao redor da Terra sem que atinja o solo?

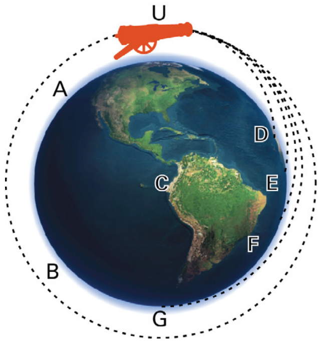

Figura 7.21: Lançamento da pedra do topo da montanha.

→ Resolução

Desprezando-se a resistência do ar, a única força que atua na pedra é o seu peso $F_{\text{Grav}} = m \cdot g$. Vamos considerar que a pedra tenha sido lançada do topo de uma montanha, cuja altitude é de 9.000 metros (9 km) acima da superfície do mar.

Para a pedra "entrar em órbita", ela deve descrever uma trajetória circular concêntrica com a superficie da Terra, admitida esférica. Assim, o raio da trajetória circular da pedra deve ser $R \approx 6.371\ \text{km} + 9\ \text{km} = 6.380\ \text{km}$.

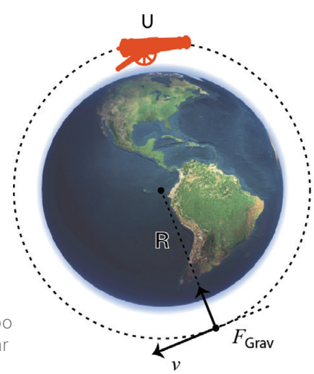

Figura 7.22: Movimento da pedra saindo do topo da montanha e perfazendo uma trajetória circular até retornar ao ponto de onde saíra.

Como a força resultante sobre a pedra é o seu próprio peso, cuja direção é normal à trajetória (e, portanto, perpendicular à velocidade orbital da pedra), o movimento executado pela pedra será do tipo MCU.

Logo, para a pedra continuar em órbita circular de raio R = 6.380 km, é necessário que o peso = mg seja dado pelo produto da massa pela aceleração centrípeta, ou seja,

$$mg = m \cdot V^2 / R \qquad 7.28$$

Donde inferimos que $V^2 = Rg$, ou ainda,

$$V = \sqrt{Rg} \qquad 7.29$$

Substituindo-se os valores acima, obtemos $V = \sqrt{6.380.000 \times 10} \approx 8.787\,\text{m/s} \sim 31.633\ \text{km/h}$! Observe que velocidades imprimidas à pedra menores do que esta não seriam suficientes para mantê-la em órbita ao redor da Terra.

- Exemplo 07:

Dois carrinhos A e B são unidos por um fio flexível e inextensível.

Uma força externa e paralela ao solo, a qual escrevemos como $\vec{F} = F\vec{i}$, puxa o carrinho B. Enquanto a ação da força perdurar, o fio permanece tenso e os carrinhos animam-se de aceleração $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i}$ (m/s²), conforme ilustra a **Figura 7.23**. Desprezando-se os atritos, indaga-se:

a. Qual a intensidade F da força externa aplicada no carrinho?

b. Qual a intensidade da força tensora T no fio que os une?

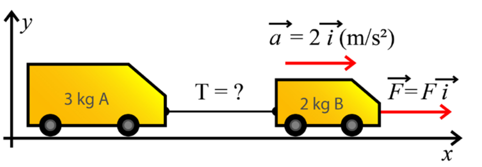

Figura 7.23: Movimento dos carros unidos por um fio flexível e inextensível.

→ Resolução

De acordo com o enunciado, os carrinhos têm aceleração comum, horizontal e para a direita. Sua componente é, portanto, a_x = 2 m/s². As massas dos carrinhos são igualmente conhecidas. Podemos determinar $\vec{F}$ a partir da 2ª Lei de Newton.

Para isso, é necessário identificar as forças que atuam em cada carrinho por meio dos respectivos DCLs.

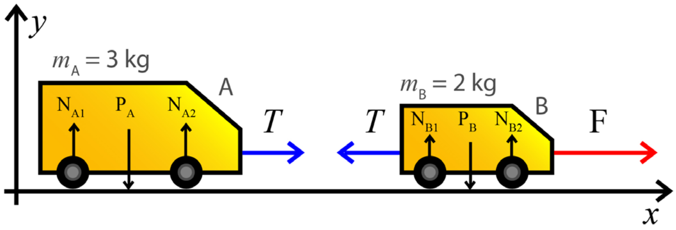

Figura 7.24: DCL de cada um dos carrinhos.

As forças que atuam sobre os carrinhos são:

- A força gravitacional ou peso, representado pela letra "*P*", é vertical para baixo.
- A força aplicada *F* no carrinho B que acelera o sistema.
- As forças de reações normais, representadas pela letra *N*, representam as reações da superfície de apoio sobre cada roda dos carrinhos; como a superfície é horizontal, as reações normais são verticais para cima.
- As forças tensoras, identificadas pela letra *T*, que representam as ações que as extremidades do fio exercem sobre cada carrinho. Elas têm a mesma intensidade, mas efeitos distintos sobre cada carrinho: sobre A, atua no mesmo sentido da aceleração a_x; sobre B, ela atua no sentido oposto, ou seja, no sentido de retardar o movimento do carrinho B.

De acordo com o referencial *xy* adotado, e considerando que os carrinhos têm aceleração comum horizontal para a direita, podemos escrever a 2ª Lei de Newton para cada carrinho, conforme consta na tabela:

	2ª Lei de Newton	Analiticamente	separando em componentes *x* e *y*
A	$\vec{T}+\vec{N}_{A1}+\vec{N}_{A2}+\vec{P}_A=m_A\cdot\vec{a}$	$T\vec{i}+\left(N_{A1}+N_{A2}-P_A\right)\vec{j}=m_A\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}\right)$	$\left(N_{A1}+N_{A2}-P_A\right)\vec{j}=\left(m_A a_y\right)\vec{j}$ (I) $T\vec{i}=\left(m_A a_x\right)\vec{i}$ (II)
B	$\vec{T}+\vec{N}_{B1}+\vec{N}_{B2}+\vec{P}_B+\vec{F}=m_B\cdot\vec{a}$	$-T\vec{i}+\left(N_{B1}+N_{B2}-P_B\right)\vec{j}+F\vec{i}=m_B\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}\right)$	$\left(N_{B1}+N_{B2}-P_B\right)\vec{j}=\left(m_B a_y\right)\vec{j}$ (III) $\left(F-T\right)\vec{i}=\left(m_B a_x\right)\vec{i}$ (IV)

Analisando a tabela:

a. Como a aceleração é horizontal → $a_y = 0$; assim, das equações **(I)** e **(III)**, resultam: $N_{A1} + N_{A2} = P_A$ e $N_{B1} + N_{B2} = P_B$.

b. Da equação **(II)** escreve-se: $T = m_A a_x$; como $m_A = 3$ kg e $a_x = 2$ m/s², segue-se que: $T = (3\ \text{kg})(2\ \text{m/s}^2) = 6$ newtons.

c. Da equação **(IV)** escreve-se: $F - T = m_B a_x$; como $m_B = 2$ kg, $a_x = 2$ m/s² e $T = 6$ newtons, tem-se $F - 6$ newtons $= (2\ \text{kg})(2\ \text{m/s}^2)$, donde $F = (6 + 4) = 10$ newtons.

Em resumo: $F = 10$ newtons e $T = 6$ newtons.

Agora é sua vez...

Acesse o Ambiente Virtual de Aprendizagem e realize a(s) atividade(s) proposta(s).