MOVIMENTOS SIMPLES 8

Gil da Costa Marques

Introdução

Estudaremos os movimentos mais simples entre todos os possíveis. Trata-se dos movimentos uniformes, associados à ausência de forças agindo sobre um corpo e daqueles decorrentes da ação de forças constantes.

Esses movimentos foram estudados exaustivamente por Galileu. Por exaustivos entendemos uma análise dos movimentos baseada no método científico, o que pressupõe o uso de todo o ferramental matemático na descrição dos movimentos e - o que era uma inovação na mecânica - baseada na experimentação.

Os resultados do estudo dos movimentos mais simples conhecidos na natureza foram publicados em sua obra *Diálogos sobre duas novas ciências,* na qual se dedica a introduzir os conceitos básicos da cinemática, uma das duas novas ciências preconizadas pelo livro.

Do ponto de vista observacional, destacamos suas experiências sobre queda livre, utilizando como plataforma de lançamento a famosa Torre de Pisa. Do ponto de vista matemático, o rigor se manifesta ao estudar movimentos simples mediante o uso de axiomas (premissa que se admite sem demonstração) e de teoremas. Muitos axiomas e muitos teoremas.

Embora simples, os movimentos aqui estudados são de grande relevância ainda hoje, uma vez que descrevem movimentos do cotidiano.

8.1 O Movimento Uniforme

Galileu definiu o movimento uniforme tal qual fazemos ainda hoje. É aquele no qual a distância percorrida pelo móvel é proporcional ao tempo despendido para percorrê-la. Ou, ainda, é definido como o movimento em que o móvel percorre distâncias iguais a intervalos de tempo iguais.

Embora seja o movimento mais simples que se possa imaginar, ele não é muito frequente. No nosso mundo, a força de atrito é a maior responsável pela redução da velocidade dos objetos. E é difícil mantê-los a uma velocidade constante. Em geral, devemos recorrer a algum artifício para eliminar o atrito ou compensá-lo.

O movimento uniforme foi analisado por Galileu no terceiro dia dos seus *Diálogos sobre duas novas ciências*. Para dar uma ideia do rigor e do grau de refinamento atingido por Galileu no estudo do movimento uniforme, citaremos o seu quarto axioma:

> "A velocidade exigida para que um corpo percorra uma distância maior, num mesmo intervalo de tempo, é maior do que aquela exigida para percorrer uma distância menor."

O seu primeiro teorema afirma que:

> "Se uma partícula é dotada de velocidade constante, então, ao percorrer duas distâncias quaisquer, o quociente dos tempos gastos para percorrê-las é igual ao quociente das distâncias percorridas."

Como se vê, à luz do que sabemos hoje, alguns resultados parecem óbvios. No entanto, o rigor matemático é importante para abarcar todas as situações possíveis.

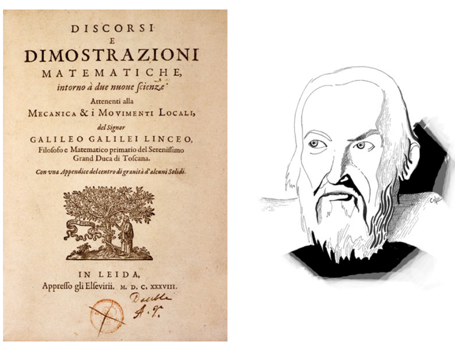

Figura 8.1: Galileu e sua grande obra.

O movimento uniforme, aqui entendido como aquele no qual a distância percorrida é diretamente proporcional aos tempos gastos para percorrê-la, ocorre em duas situações distintas.

Na primeira delas, a força que age sobre um corpo, ou a soma de todas as forças, se anula. Na segunda, válida para o movimento ao longo de uma curva, basta que a força na direção tangencial à curva se anule.

No caso em que a força é nula, sua aceleração também o será. Assim, escrevemos:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \qquad 8.1$$

A solução da equação acima é bastante simples. Podemos verificar que a solução é aquela para a qual a velocidade é constante e, portanto, igual para qualquer instante de tempo:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 \qquad 8.2$$

onde $\vec{v}_0$ é a velocidade inicial e, nesse caso, é a mesma para qualquer tempo. Observe que a solução

$$\vec{v}_0 = 0, \tag{8.3}$$

que caracteriza o repouso permanente, é uma solução possível.

Observe que a solução **8.3** implica que a taxa de variação do vetor posição é constante, o que nos permite escrever:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 \tag{8.4}$$

Devemos agora encontrar uma solução para a equação acima. Não é difícil verificar que a solução para a equação acima é:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0} \tag{8.5}$$

A equação **8.5** é a equação horária do movimento uniforme.

Para o caso em que o móvel não se encontra em repouso, a sua trajetória será retilínea. Para verificar isso, basta que analisemos o vetor posição como a soma de um vetor constante mais um vetor cujo módulo cresce linearmente com o tempo. Para diferentes tempos, a situação pode ser entendida a partir da **Figura 8.2**. A reta associada à trajetória é ao longo do vetor velocidade.

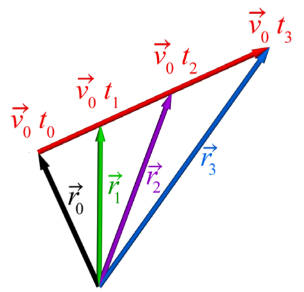

Figura 8.2: Trajetória retilínea obtida mediante o uso de vetores.

Para verificar tal assertiva, basta considerar um sistema de referência em que o eixo x (ou o eixo y ou o eixo z) coincida com a direção da velocidade inicial. Nesse caso, o movimento dar-se-á ao longo de tal eixo. O movimento será retilíneo e uniforme. Sua equação horária quando o movimento ocorre ao longo do eixo x é:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t + x_0 \\ y &= y_0 \\ z &= z_0 \end{aligned} \tag{8.6}$$

Exemplos

- Exemplo 01:

Uma pequena esfera de aço (R = 2 mm) é solta (ou seja, inicialmente estava em repouso) na superfície do óleo de soja contido num cilindro graduado em centímetros (muito comum em laboratórios de Química). Ela afunda no óleo movimentando-se ao longo de uma trajetória retilínea. A tabela registra a coordenada y da esfera em função do tempo após medidas acuradas, tomadas um pouco depois de ela iniciar o movimento na descendente.

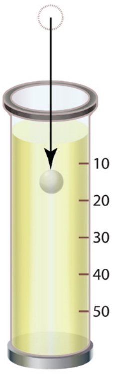

Figura 8.3: Cilindro graduado em centímetros.

t (s)	0	1,6	3,3	5,0	6,7	8,4
y (cm)	0	10	20	30	40	50

Determine as equações horárias da velocidade e da coordenada y.

→ Resolução:

Os dados indicam que intervalos de distâncias regulares de Δy = 10 cm são percorridos a intervalos de tempo igualmente regulares de $\Delta t \cong 1{,}7$ s. Conclui-se, portanto, que o movimento da esfera é uniforme, pois distâncias iguais são percorridas em intervalos de tempos iguais. Infere-se, portanto, que, para o intervalo de tempo considerado, a aceleração da esfera é nula.

Nas circunstâncias acima, as equações horárias da velocidade e da coordenada y (adotando-se o eixo $0y$ vertical para baixo e com origem na superfície do óleo) são:

$$v(t) = 6 \text{ cm/s}$$

e, portanto, de **8.5**, tem-se:

$$y = 6.t$$

- Exemplo 02:

Explique, com base em considerações dinâmicas, **por que a velocidade da esfera se torna constante decorrido certo intervalo de tempo**.

→ Resolução:

Vamos analisar as forças sobre a esfera em movimento dentro do óleo. Sobre a esfera agem três forças, as quais são ilustradas na **Figura 8.4** e explicadas no quadro a seguir:

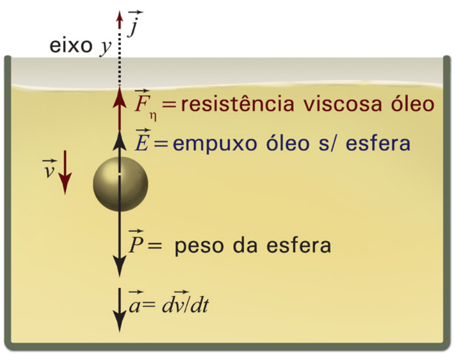

Figura 8.4: Forças agindo sobre a esfera de óleo.

1. $\vec{P}$ = força gravitacional; módulo $P = mg$
2. $\vec{E}$ = é a força denominada empuxo. Ela tende a "empurrar" a esfera para cima.
   Módulo de E = peso do volume de líquido deslocado. Nesse caso, o empuxo é menor do que o peso da esfera: $E < P$.
3. $\vec{F}_\eta$ = força viscosa; tem relação com a viscosidade do fluido e resiste ao movimento. O módulo dessa força, de acordo com "Forças", é dado por: $F_\eta = -k.v$; onde v é a velocidade da esfera. Ela sempre se opõe ao movimento. Tem sentido oposto a $\vec{v}$. Para objetos esféricos de raios pequenos: $k = 6\pi\eta R$, onde η = coeficiente de viscosidade do fluido.

Aplicando-se a 2ª Lei de Newton à esfera, escrevemos:

$$\sum \vec{F}_{\text{esfera}} = m \cdot \vec{a} \qquad (8.7)$$

Utilizando-se o referencial cartesiano da **Figura 8.4**, escrevemos a equação acima como:

$$\left(E - P + F_\eta\right)\vec{j} = \left(m \cdot a\right)\vec{j} \qquad (8.8)$$

Assim, em termos da componente y, escrevemos:

$$\left[E - P\right] + F_\eta = m \cdot a \qquad (8.9)$$

A parcela $F_\eta = -k.v$ aumenta com o aumento da velocidade. Esse termo cresce à medida que a velocidade aumenta. Existe, no entanto, um limite para esse crescimento, um valor máximo da velocidade, portanto. Ela cresce até o ponto em que a força viscosa se equilibra com o termo $[E - P]$.

Assim, a aceleração tende a se anular com o aumento da velocidade v. Existe um valor máximo de v, denominado v_{Limite}, para o qual a aceleração se anula:

$$[E - P] - kv_{\text{Limite}} = m \cdot a = 0 \tag{8.10}$$

Assim, quando a velocidade da esfera atingir o valor limite − o valor máximo −, a aceleração torna-se nula e o movimento passa a ser uniforme a partir daí. É esse comportamento que é refletido no quadro acima. A velocidade limite é dada, portanto, pela expressão:

$$v_{\text{Limite}} = \frac{[P - E]}{k} \tag{8.11}$$

Fato semelhante ocorre com qualquer objeto que se movimente num fluido gasoso ou líquido. As gotas de chuva e as pessoas que saltam com paraquedas abertos atingem, ao cair, uma velocidade limite. Na maioria dos casos, essa velocidade limite é muito menor do que a que elas teriam se a queda fosse livre.

8.2 Movimento Uniforme ao Longo de uma Curva

Quando a força, ou a soma das forças, que age sobre um corpo for não nula, mas a componente da força ao longo da direção tangencial à curva for nula, ainda assim classificamos o movimento como movimento uniforme.

Na situação descrita acima, podemos nos certificar de que a lei de Newton para a componente tangencial assume a forma:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \tag{8.12}$$

onde v agora é a velocidade escalar. A solução nesse caso é simples:

$$v = v_0 \tag{8.13}$$

ou seja, a velocidade escalar é constante ao longo da curva. A equação análoga a **8.12** é: $(ds)/(dt) = v_0$, cuja solução é:

$$s = v_0 t + s_0 \tag{8.14}$$

Assim, no caso do movimento ao longo de uma curva, com uma trajetória predeterminada, podemos ter um movimento uniforme desde que a força tenha uma componente nula na direção em que o movimento se dá.

- Exemplo 03:

Um carro (massa total m = 800 kg) move-se com velocidade escalar de 72 km/h em uma pista horizontal e plana. Num determinado ponto da pista, ele atinge um trecho descrito por um arco de circunferência de raio R = 800 m, mantendo, no entanto, a sua velocidade constante. Ele sai desse percurso em outro ponto da pista.

a. Qual a aceleração do carro quando ele adentra a parte curva da pista?

b. Qual é o comprimento do arco percorrido pelo carro se a curva é realizada em 20 segundos?

c. Qual a soma vetorial das forças $(\sum\vec{F}_{carro})$ sobre o carro?

→ Resolução:

O esquema da **Figura 8.5** representa um diagrama do corpo livre do carro. São nela apresentados o sistema cartesiano e as coordenadas utilizadas.

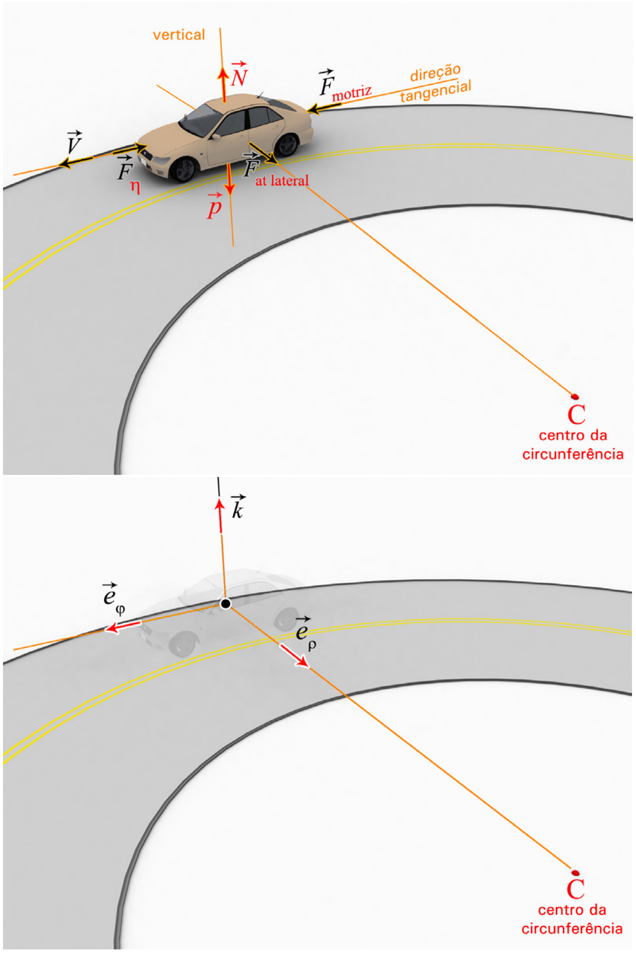

Figura 8.5: Diagrama do corpo livre do carro e o referencial polar utilizado.

Inferimos que:

1. Na direção vertical, ao longo do eixo z, atuam duas forças de sentidos opostos: o peso $\vec{P}$ e a reação normal $\vec{N}$ exercida pela pista sobre o carro (é, na realidade, a soma das normais). Essas forças podem ser escritas como:

$$\vec{p} = m\vec{g} = -mg\vec{k} \qquad \vec{N} = N\vec{k} \tag{8.15}$$

Assim, a soma das forças na direção vertical é dada por:

$$\vec{F}_{\text{vertical}} = F_z\vec{k} = \left(-mg + N\right)\vec{k} \tag{8.16}$$

2. Na direção tangencial à trajetória curvilínea, perpendicular à vertical e na direção da velocidade vetorial, usualmente definida como a direção azimutal, atuam duas forças, também de sentidos opostos:

a. A força motriz $\vec{F}_{\text{motriz}}$ é aquela que resulta do atrito estático entre a roda e a pista. Essa força impulsiona o carro no sentido do movimento.

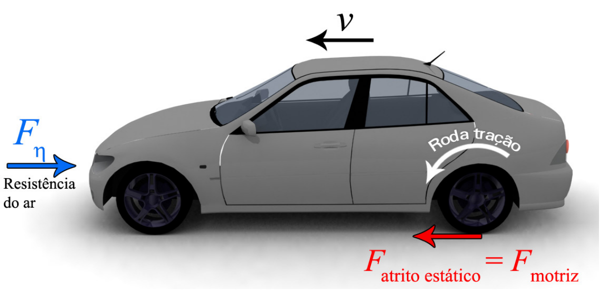

Figura 8.6: Forças na direção do movimento.

b. A força de resistência do ar $\vec{F}_\eta$ surge devido ao atrito viscoso do veículo com o ar. A reação a essa força leva ao deslocamento do ar à frente do veículo. Assim, essa força resultante da colisão do veículo com as moléculas do ar atua sempre no sentido de reduzir a velocidade desse veículo. A intensidade dessa força depende da velocidade, de tal forma que, acima de 20 m/s, ela é bem descrita pela expressão:

$$F_\eta = F\left(v\right) = F_v = C \cdot v^2 \tag{8.17}$$

onde C depende do formato aerodinâmico do carro. Ela aumenta com o quadrado da velocidade do veículo.

Assim, na direção tangencial escrevemos (lembrete: $\vec{e}_\varphi$ = versor na direção tangente à curva):

$$\vec{F}_{\text{tan}} = (F_{\text{motriz}} - F_\eta)\vec{e}_\varphi \qquad 8.18$$

c. Na direção radial atua a força de atrito lateral $\vec{F}_{\text{at lateral}}$; essa força age lateralmente no contato dos pneus com a pista. Seu efeito é "segurar" o carro, mantendo-o na trajetória curvilínea, evitando assim que o carro escape (derrape) para fora da curva. Devido à inércia (1ª Lei de Newton), o carro tende a conservar a sua velocidade, que é tangencial à curva. Assim, se a intensidade dessa força não for suficiente, o carro "sai" pela tangente. Assim, na direção radial existe apenas uma força, a qual escrevemos como:

$$\vec{F}_{\text{radial}} = -(F_{\text{at. lateral}})\vec{e}_\rho = -\mu N\vec{e}_\rho \qquad 8.19$$

onde μ é o coeficiente de atrito cinético entre a pista e os pneus do carro e $\vec{e}_\rho$ = versor na direção radial.

Assim, a força total que age sobre o carro é dada pela soma:

$$\sum_{i=1}^{5}\vec{F}_i = F_\rho\vec{e}_\rho + F_\varphi\vec{e}_\varphi + F_z\vec{e}_z = -\mu N\vec{e}_\rho + (F_{motriz} - F_\eta)\vec{e}_\varphi + \left(-mg + N\right)\vec{k} \qquad 8.20$$

a. Qual a aceleração do carro que se movimenta na curva?

A aceleração vetorial, na notação vetorial, pode ser escrita como:

$$\vec{a} = \vec{a}_\rho + \vec{a}_\varphi + \vec{a}_z = a_\rho\vec{e}_\rho + a_\varphi\vec{e}_\varphi + a_z\vec{e}_z \qquad 8.21$$

onde os termos acima podem ser identificados, respectivamente, como as componentes radial, azimutal (ou tangencial) e vertical.

De acordo com a 2ª Lei de Newton, temos:

$$\vec{F} = m\left(\vec{a}_\rho + \vec{a}_\varphi + \vec{a}_z\right) = ma_\rho\vec{e}_\rho + ma_\varphi\vec{e}_\varphi + ma_z\vec{e}_z \qquad 8.22$$

Utilizando **8.20** na equação **8.22**, obtemos componentes da aceleração:

$$a_\rho = -\frac{\mu N}{m}$$
$$a_\varphi = \frac{F_{\text{motriz}} - F_\eta}{m} \quad 8.23$$
$$a_z = \left(-g + \frac{N}{m}\right)$$

I. Na direção vertical, a aceleração é nula (o carro não sobe nem desce). Isso implica que a força peso é equilibrada pela força normal ($N = mg$).

II. Considerando-se que o carro mantém a velocidade escalar de 20 km/h, sem alterações, a aceleração tangencial é nula: $a_\varphi = 0$. Donde concluímos, utilizando a expressão **8.23**, que, em virtude de as forças (motriz e da resistência do ar) terem direções iguais, seus módulos também são iguais $|\vec{F}_{\text{motriz}}| = |\vec{F}_\eta|$, mas têm sentidos opostos.

III. No que diz respeito à direção radial, podemos escrever, de **8.23** e **7.20**, que:

$$a_\rho = -\frac{v^2}{R} = -\frac{\mu N}{m} \quad 8.24$$

Para os valores da velocidade e do raio dados (v = 72 km/h = 20 m/s e R = 800 m), obtemos:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{(20\ \text{m/s})^2}{800\ \text{m}} = 0{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Assim, a aceleração centrípeta, adotando-se o sistema mks ou SI, é dada por:

$$\vec{a} = -0{,}5\vec{e}_\rho$$

b. Qual é o comprimento do arco percorrido pelo carro se a curva é realizada em 20 segundos?

Como o movimento é uniforme, temos a variação de espaços percorridos igual ao intervalo de tempo decorrido:

$$\Delta s = v\Delta t \quad 8.25$$

Sendo nesse caso Δt = 20 s e v = 20 m/s (72 km/h) $\rightarrow \Delta s = v.\Delta t$ = (20 m/s)(20 s) = 400 m, ou seja, a distância percorrida no intervalo de 20 segundos é de 400 m.

c. Qual a soma vetorial das forças sobre o carro $\sum\vec{F}_{\text{carro}} = ?$

De **8.20** e **8.23**, segue-se que:

$$\sum_{i=1}^{5}\vec{F}_i = F_\rho\vec{e}_\rho + F_\varphi\vec{e}_\varphi + F_z\vec{e}_z = -\mu N\vec{e}_\rho \qquad 8.26$$

Em qualquer objeto que se movimente ao longo de uma trajetória circular com velocidade tangencial constante, a somatória das forças que agem sobre ele é radial, apontando sempre para o centro da circunferência.

8.3 A Luz e o Movimento Uniforme

A propagação da luz constitui-se num dos melhores exemplos de movimento retilíneo e uniforme na natureza e isso porque a luz é composta por partículas diminutas, de massa nula, conhecidas como fótons (fóton em grego significa luz). A luz se propaga, em meios homogêneos como a água ou o espaço intergaláctico (entre as galáxias), em linha reta. Ademais, a velocidade da luz num meio homogêneo é constante.

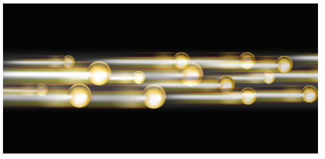

Figura 8.7: Fotóns deslocam-se à velocidade da luz.

Consequentemente, os fótons, que compõem a luz, propagam-se em linha reta e com velocidade constante.

A velocidade da luz é de 299.792.458 m/s ou, aproximadamente, 3×10^8 m/s.

Figura 8.8: Nada se propaga a uma velocidade maior do que a da luz.

- Exemplo 04:

Estima-se em 300 sextilhões (300×10^{21}) a quantidade de estrelas existentes no universo observável. Com exceção do Sol, a estrela mais próxima da Terra é aquela localizada na da constelação de Centauro, denominada Próxima Centauri – uma anã vermelha distante de nós, terráqueos, cerca de 40 trilhões de quilômetros (40×10^{12} km).

Para saber mais sobre a anã vermelha, acesse: http://pt.wikipedia.org/wiki/Anã_vermelha

a. A luz responsável pela imagem de "Próxima Centauri" capturada por um telescópio aqui na Terra, neste instante, foi emitida há quanto tempo nessa estrela?

b. O que significa "anos-luz"?

→ Resolução:

A luz se propaga em linha reta no espaço intergaláctico considerado como euclidiano, com velocidade de aproximada de c = 300.000 km/s; o movimento dos fótons de luz é retilíneo e uniforme. Logo:

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{c} \tag{8.27}$$

Substituindo-se os dados na expressão acima, obtemos:

$$\Delta t = \frac{40 \cdot 10^{12}\ \cancel{\text{km}}}{300.000 \dfrac{\cancel{\text{km}}}{\text{s}}} = \frac{40 \cdot 10^{12}}{3 \cdot 10^{5}} (\text{s}) \cong 13,3 \cdot 10^{7}\ \text{s}$$

Como 1 ano ≅ $31,54 \times 10^6$ s, o intervalo de tempo Δt = $13,3.10^7$ s pode ser convertido em "anos" por uma regra de três simples:

$$\Delta t = \left(13,3 \cdot 10^{7}\text{s}\right) / \left(31,54 \times 10^{6}\ \text{s/ano}\ \cong 4,2\ \text{anos}\right)$$

Isso significa que, hoje, estamos vendo uma imagem do que aconteceu na Próxima Centauri num passado remoto: cerca de 4,2 anos atrás.

O termo anos-luz corresponde a uma unidade de distância; 1 ano-luz equivale à distância percorrida pela luz durante um intervalo de tempo de 1 ano. Assim,

$$d_{\text{ano-luz}} = c t_{\text{ano}}$$

Donde inferimos que um ano-luz é a distância, expressa em quilômetros, dada por:

$$d_{\text{ano luz}} = 300 \cdot 10^5 \left(\text{km}/\cancel{\text{s}}\right) \cdot 31,54 \cdot 10^6 \left(\cancel{\text{s}}\right) = 946,2 \cdot 10^{11}\ \text{km}$$

Nessa unidade, a distância entre a Próxima Centauri e a Terra é de 4,2 anos-luz.

O telescópio Hubble obteve uma imagem de uma galáxia espiral distante 17 milhões de anos-luz. É onde ela se encontra hoje? Certamente que não. Essa luz originou-se num passado remoto, muito remoto. Ao longo desse tempo, a galáxia observada já mudou de posição, pois tudo no céu está em movimento.

8.4 Movimento Uniformemente Variado

Como no caso do movimento uniforme, existem duas definições para o que denominamos movimentos uniformemente variados. Na primeira delas, dizemos que tais movimentos ocorrem quando a força (ou a soma das forças) é constante.

A segunda definição é aquela que o define como o movimento ao longo de uma curva, em que a componente da força na direção tangencial a ela se anula. Essa segunda definição se aplica apenas ao caso específico do movimento que se dá ao longo de uma curva predefinida. Assim, essas definições não são equivalentes.

Galileu definia o movimento uniformemente acelerado como aquele no qual a variação da velocidade é proporcional ao intervalo de tempo em que essa variação ocorre.

Em seus *Diálogos sobre duas novas ciências*, Galileu manifesta sua compreensão de que o movimento de queda dos objetos na superfície terrestre é um movimento uniformemente acelerado. Assim, esse é o tipo de movimento ao qual nós, habitantes do planeta Terra, estamos muito acostumados. Ele ocorre no dia-a-dia. Já se incorporou ao cotidiano das pessoas. É bom lembrar, no entanto, que, no caso da força da gravidade na superfície terrestre, estamos falando de uma aproximação válida desde que a altura atingida pelo objeto na superfície terrestre seja muito menor do que o raio da Terra. Em geral, uma força constante é o resultado de algum tipo de aproximação e, portanto, válida dentro de determinadas condições.

Galileu, em seus diálogos, argumenta que os movimentos denominados naturais por Aristóteles são bastante simples. O fato é que o movimento acelerado mais simples é o uniformemente acelerado. Galileu argumentou que a queda dos objetos poderia ser explicada a partir desse argumento da simplicidade do movimento.

Galileu concluiu, sem o uso do cálculo diferencial, pois este ainda era desconhecido, que, para tais movimentos,

> "Os espaços associados a um corpo que cai em queda livre a partir do repouso variam de acordo com o quadrado dos intervalos de tempo necessários para percorrê-los."

8.4.1 Forças Constantes

Analisemos as soluções das equações gerais do movimento quando a força é constante. Tendo em vista que essa é uma aplicação muito simples da dinâmica newtoniana, mas ainda de interesse, vamos apresentar tais soluções fazendo uso do conceito de derivada de funções do segundo grau. Para isso lembramos que, se $P^n(x)$ for um polinômio de grau n, sob a forma geral:

$$P^n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad 8.28$$

então, a derivada dessa função polinomial será dada por:

$$\frac{dP^n(x)}{dx} = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots\cdots + 2a_2 x + a_1 \quad 8.29$$

Analisaremos agora o caso de uma força constante. Seja $\vec{F}$ a tal força. O fato de ser constante implica que o mesmo vale para suas componentes. Escrevendo as componentes como:

$$F_x = F_{0x}, \qquad F_y = F_{0y}, \qquad F_z = F_{0z}$$

os valores de F_{0x}, F_{0y} e F_{0z} são valores constantes.

Observe que, se a força for constante, a aceleração também o será. Consequentemente, a segunda lei de Newton nos permite prever que as componentes constantes da aceleração serão dadas pela relação entre a força e a massa:

$$a_{0x} = \frac{F_{0x}}{m}, \qquad a_{0y} = \frac{F_{0y}}{m}, \qquad a_{0z} = \frac{F_{0z}}{m} \tag{8.30}$$

As três equações de Newton, envolvendo cada uma das componentes da força, assumem agora uma forma igual. Escrevemos:

$$m\frac{dv_x(t)}{dt} = F_{0x}, \qquad m\frac{dv_y(t)}{dt} = F_{0y}, \qquad m\frac{dv_y(t)}{dt} = F_{0z} \tag{8.31}$$

Como as equações são iguais, podemos analisar a solução de apenas uma delas. Por exemplo, a equação para a componente x escreve-se como:

$$m\frac{dv_x(t)}{dt} = F_{0x} \tag{8.32}$$

A solução da equação acima é, de acordo com as expressões **8.28** e **8.29**, dada por:

$$\boxed{v_x(t) = a_{0x}t + v_{0x} = \left(\frac{F_{0x}}{m}\right)t + v_{0x}} \tag{8.33}$$

onde v_{0x} é uma constante cuja interpretação física é bem simples. Trata-se da velocidade inicial, pois, tomando-se o tempo $t = 0$, na solução **8.33**, obtemos:

$$v_x(0) = v_{0x} \tag{8.34}$$

Tendo em vista que soluções análogas valem para as demais componentes, podemos escrever a solução em termos de vetores. Essa solução é, portanto:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{a}_0 t + \vec{v}_0 = \left(\frac{\vec{F}}{m}\right)t + \vec{v}_0} \tag{8.35}$$

Busquemos agora a solução para a dependência da posição em relação ao tempo. Uma vez que as equações assumem a mesma forma, analisemos o caso de uma componente apenas. De acordo com a definição de velocidade, podemos escrever, para a dependência da coordenada x em relação ao tempo, a seguinte equação:

$$\frac{dx(t)}{dt} \equiv v_x(t) = a_{0x}t + v_{0x} \quad 8.36$$

Levando-se em conta a expressão geral para polinômios de grau n e aplicando-se tal expressão para polinômios de segundo grau, concluímos que a solução para a dependência da coordenada em relação ao tempo é:

$$\boxed{x(t) = \frac{a_{0x}}{2}t^2 + v_{0x}t + x_0} \quad 8.37$$

onde x_0 é o valor da componente x no instante de tempo $t = 0$, ou seja,

$$x(0) = x_0$$

Utilizando a representação vetorial, verificamos que, no caso em que a força é constante, o vetor posição da partícula evolui com o tempo de acordo com a expressão:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \frac{\vec{a}_0}{2}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0} \quad 8.38$$

A solução para o problema de se determinar a posição de uma partícula nesse caso, bem como no caso geral, envolve o conhecimento da posição e da velocidade da partícula num instante de tempo inicial, aqui considerado o instante de tempo $t = 0$.

Denominam-se condições iniciais as condições de início do movimento. Para conhecê-las bastam, no caso do movimento, a velocidade e a posição das partículas no instante de tempo no qual iniciamos o estudo do movimento. Esse instante é arbitrário.

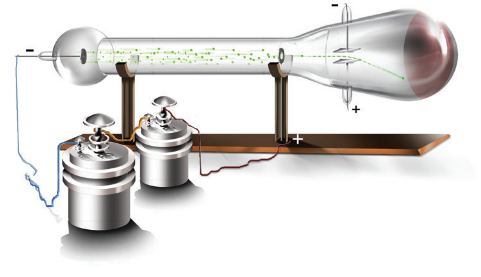

Figura 8.9: O movimento dos raios catódicos ocorre, em certos trechos, com aceleração constante.

8.4.2 Aceleração Escalar Constante

No caso em que o movimento se dá ao longo de uma curva pré-fixada, dizemos que o movimento é uniformemente acelerado quando a componente da força na direção tangencial à curva é constante, ou seja, a força total pode variar à vontade, desde que sua componente tangencial se mantenha constante. Nesse caso, considerando-se apenas a componente tangencial, a segunda lei de Newton escreve-se da seguinte maneira:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{F_0}{m} = a_0 \qquad 8.39$$

onde F_0 é a componente tangencial da força (admitida constante) e v é a velocidade escalar da partícula definida em **3.6**.

$$v = a_0 t + v_0 \qquad 8.40$$

A definição da coordenada espaço leva-nos à seguinte equação para sua dependência em relação ao tempo:

$$\frac{ds(t)}{dt} \equiv v(t) = a_0 t + v_0 \qquad 8.41$$

Assim, de forma análoga ao que fizemos antes, ou seja, levando-se em conta a expressão geral para a derivada de polinômios de segundo grau, podemos concluir que a solução para a dependência da coordenada espaço em relação ao tempo é:

$$\boxed{s(t) = \frac{a_0}{2} t^2 + v_0 t + s_0} \qquad 8.42$$

onde agora s_0 e v_0 representam, respectivamente, o espaço inicial e a velocidade escalar inicial.

- Exemplo 05:

Em uma pista asfaltada na qual existe um trecho plano e sem curvas, um carro de massa total m = 800 kg é freado bruscamente quando o velocímetro acusa uma velocidade escalar de 90 km/h. Devido ao travamento das rodas, os contatos entre os pneus e o asfalto fazem surgir uma força total de atrito ($F_{at} = \mu \cdot N$), a qual, como sabemos, atua no sentido contrário ao do movimento. Sendo μ o coeficiente de atrito entre o pneu e o asfalto dado por μ = 0,6 e considerando-se g = 10 N/kg, determinar:

a. A aceleração do carro durante a frenagem.

b. As equações horárias do espaço e da velocidade.

c. O espaço percorrido até o carro parar.

→ Resolução:

a. A aceleração do carro durante a frenagem.

Na **Figura 8.10**, o bloco representa o DCL do carro; nele estão desenhadas as forças que atuam sobre o carro durante o processo de frenagem.

Verificamos então que, considerando-se o sistema cartesiano da **Figura 8.10**, as componentes da força resultante sobre o carro são dadas por:

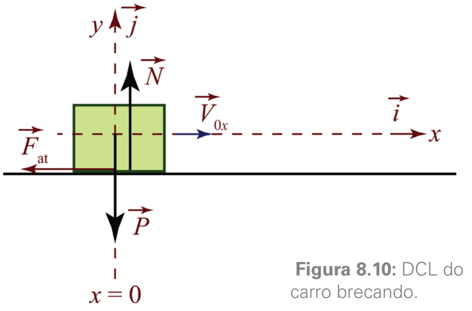

Figura 8.10: DCL do carro brecando.

$$F_x = (F_{at})_x = -\mu N \tag{8.43}$$

$$F_y = N - mg \tag{8.44}$$

Da segunda lei de Newton, inferimos que:

$$\begin{aligned} ma_x &= F_x = -\mu N \\ ma_y &= F_y = N - mg \end{aligned} \tag{8.45}$$

Como não existe movimento na direção vertical (a direção do eixo y), a componente vertical da aceleração é nula. Escrevemos a_y = 0. Portanto, de **8.45**, concluímos que a força peso tem o mesmo módulo e direção da soma das forças normais, mas sentido oposto à força normal. Escrevemos:

$$N = P = mg = 8.000 \text{ newtons}$$

Desprezando-se a resistência do ar, a única força que atua sobre o carro na direção horizontal (a direção do eixo x) é a força de atrito, cujo modulo é $F_{at} = \mu \cdot N$ = (0,5)(8.000 newtons) = 4.000 newtons. **Esta força de atrito tem o sentido oposto ao da velocidade. Ademais, ela não é motriz**. Vetorialmente, escrevemos $\vec{F}_{at} = -(4.000)\vec{i}$ (o sinal negativo é necessário para indicar que esta força tem sentido oposto ao da orientação do eixo 0x). De **8.45** segue-se que:

$$\sum \vec{F}_x = -(4.000)\vec{i} = m.\vec{a}_x = 800(a_x)\vec{i}$$
$$-4.000 = 800 \cdot a_x \rightarrow a_x = -5 \text{ m/s}^2$$

A aceleração do carro, durante a frenagem, é $a_x = (dv_x)/(dt) = -5$ m/s²; o sinal negativo indica que a variação da velocidade é negativa e que a velocidade escalar diminui durante o tempo de frenagem.

b. As equações horárias do espaço e da velocidade.

Para escrever as equações horárias, é necessário conhecer as condições iniciais no instante $t = 0$ (que vamos considerar como o instante em que o motorista aciona os freios). Então, temos os seguintes dados:

$$x_0 = 0; \; v_{0x} = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}; \; a_{0x} = a_x = -5 \text{ m/s}^2$$

Como o movimento é uniformemente acelerado, as equações são obtidas a partir de **8.42**. Substituindo-se os valores acima para as condições iniciais e a aceleração, obtemos com todas as unidades no sistema mks:

$$x(t) = 25t - 2,5t^2$$
$$v_x(t) = 25 - 5t$$

c. O espaço percorrido até o carro parar

Formalmente, o carro para quando sua velocidade se anula, ou seja, $v_x = 0$. Assim, o instante em que isso ocorre é obtido a partir de:

$$0 = 25 - 5t \rightarrow t = 5 \text{ s}$$

Substituindo-se o valor $t = 5$ s na equação horária do espaço, encontramos o valor de x quando o carro para:

$$x(t = 5 \text{ s}) = 25(5) - 2,5(5)^2 = 62,5 \text{ m}$$

Portanto, até parar, o carro percorre uma distância de 62,5 metros. Essa é a distância mais segura visando a evitar um acidente com um animal que, repentinamente, atravessa a pista quando viajamos a essa velocidade. Deve-se levar em conta, no entanto, que em dias de chuva o coeficiente de atrito se reduz. Portanto, a distância segura em dias chuvosos é ainda maior.

8.5 Lançamento na Vertical e a Queda livre

Um caso especial de força constante, ou melhor, constante dentro de uma boa aproximação, é o do movimento vertical sob a ação da força gravitacional. Essa força é dirigida sempre em direção ao centro da Terra, fato esse que induziu Aristóteles a imaginar que o centro da Terra seria o centro do Universo. No mais das vezes, consideramos a Terra como plana. É uma boa aproximação para o estudo dos movimentos que ocorrem próximo à superfície terrestre (por exemplo, a queda de uma maçã de uma árvore de 5 metros de altura), considerando-se o fato de que seu raio é de cerca de 6.400 km. Assim, escolhendo-se a origem do sistema de referência coincidente com um ponto sobre a superfície terrestre, e considerando o eixo x paralelo ao plano e o eixo y como perpendicular à superfície terrestre e orientando-o de tal forma que tenha um sentido contrário ao da força da gravidade, podemos escrever para a componente y da força gravitacional a seguinte expressão:

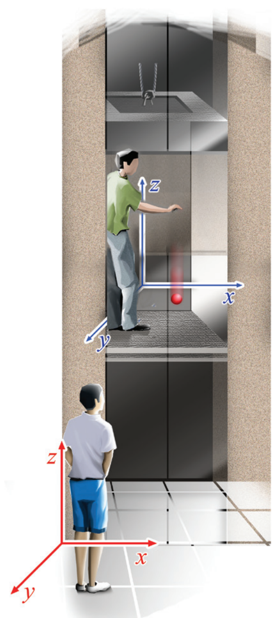

Figura 8.11: Queda livre avaliada de dois sistemas de referência.

$$F_y = -mg \tag{8.46}$$

A condição para que o movimento se dê apenas na direção vertical é a de que a componente x se mantenha constante durante o movimento:

$$x = x_0$$

Para uma força gravitacional constante, as equações mais gerais para movimentos verticais são as que envolvem a componente y da velocidade e a coordenada y. De acordo com a análise anterior, temos as seguintes equações:

$$v_y = -gt + v_{0y}$$
$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 \qquad 8.47$$

O valor da aceleração da gravidade na cidade de São Paulo é g = 9,8 m/s².

A situação em que o corpo inicialmente está em repouso, isto é, em que $v_{0x} = v_{0y} = 0$, é conhecida como movimento de queda livre. Nesse caso, as equações se simplificam ainda mais e temos:

$$v_y = -gt$$
$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 \qquad 8.48$$

- Exemplo 06:

A castanheira do Pará é uma árvore que pode alcançar mais de 30 m de altura e pode viver mais de 500 anos. Imaginando-se que um fruto dessa árvore, de massa m = 2 kg, se solta de um galho a 25 m de altura, qual é o tempo de queda e com que velocidade o fruto atinge o solo?

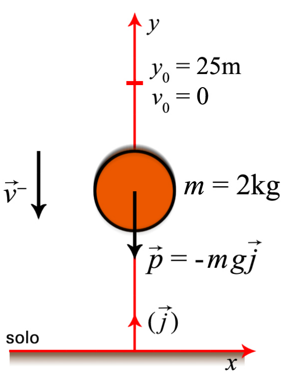

Figura 8.12: DCL da castanha-do-Pará.

→ Resolução:

Desprezando-se a força de resistência do ar, a única força que atua sobre o fruto em queda é o seu peso.

Portanto, de acordo com a lei de Newton, podemos escrever:

$$\vec{F} = m\vec{g} = m\vec{a} \qquad 8.49$$

Utilizando o referencial da **Figura 8.12**, escrevemos:

$$m\vec{g} = -mg\vec{j} = m\vec{a} = ma_y\vec{j} \qquad 8.50$$

E, portanto, admitindo-se a aceleração da gravidade como constante, a componente da aceleração na direção vertical é constante e dada por $a_y = -g = -9{,}8$ m/s² (o sinal negativo indica que a aceleração de queda tem sentido vertical para baixo). Observe que a aceleração de queda livre não depende da massa do objeto que cai. **Todos os corpos caem com a mesma aceleração**.

A equação geral para a queda livre é da forma **8.48**. Assim, adotando-se o instante de tempo inicial $t = 0$ como aquele no qual o fruto se desprende da árvore, as condições iniciais são: $v_{0y} = 0$; $y_0 = 25$ m. Ademais, $a_y = -g$ (para facilitar os cálculos, vamos considerar $g = 10$ m/s²). Temos, assim, as seguintes equações horárias do movimento:

$$y(t) = 25 - 5t^2$$
$$v(t) = -10t$$

Para determinar a velocidade com que o fruto atinge o solo, é necessário conhecer o tempo t de queda. Impondo $y = 0$ $(0 = 25 - 5t^2)$, o valor de t fisicamente aceitável é aquele que satisfaz esta equação e tem o valor positivo. O resultado é $t = \sqrt{5} \cong 2{,}24$ s.

Substituindo-se esse valor na equação da velocidade, temos:

$$v = -10(2{,}24) = 22{,}4 \text{ m/s} \approx 80 \text{ km/h}$$

A conclusão, portanto, é a de que o fruto atinge o solo aproximadamente 2,24 s após se soltar do galho com velocidade aproximadamente igual a 80 km/h.

- Exemplo 07:

É costume, em condições especiais, um pedreiro (A) lançar uma telha para outro (B), que se encontra no telhado. Com que velocidade v_{0y} o pedreiro A deve lançar uma telha verticalmente de forma que ela chegue com velocidade nula às mãos do pedreiro B?

Admita que a diferença de altura entre as mãos dos pedreiros seja de 3,2 m. Ademais, desprezar a resistência do ar e considerar $g = 10$ m/s².

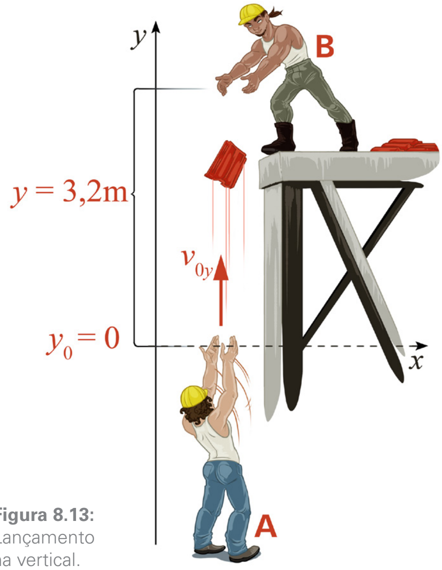

Figura 8.13: Lançamento na vertical.

→ Resolução:

Após o lançamento, e desprezando-se a resistência do ar, o movimento da telha ocorre unicamente sob a ação do seu peso. Adotando-se o referencial da **Figura 8.13**, podemos escrever:

$$\vec{p} = -mg\vec{j} \tag{8.51}$$

Adotamos o instante de tempo inicial como aquele no qual a telha é lançada. Ademais, escolhemos o eixo de referência 0*y* na vertical orientado para cima, e com origem na posição em que a telha é lançada. Assim, as condições iniciais são:

$$y_0 = 0; v_{0y} = ?$$

As equações horárias da componente *y* da velocidade e da coordenada *y* são:

$$y(t) = v_{0y}t - 5t^2$$
$$v_y(t) = v_{0y} - 10 \cdot t$$

Quando a telha atinge as mãos do pedreiro B, sua velocidade se anula ($v = 0$); mediante a equação da velocidade, obtemos o tempo de voo da telha:

$$0 = v_{0y} - 10 \cdot t \Rightarrow t = \frac{v_{0y}}{10} \tag{8.52}$$

Observe que, se v_{0y} fosse conhecido, o instante de tempo determinado acima seria o instante em que a telha atinge as mãos do pedreiro B.

Substituindo-se o resultado para o tempo **8.52**, na equação horária da coordenada *y*, teremos uma equação quadrática envolvendo apenas uma incógnita:

$$3,2 = v_{0y}\left(\frac{v_{0y}}{10}\right) - 5\left(\frac{v_{0y}}{10}\right)^2$$

ou seja:

$$320 = 5\left[v_{0y}\right]^2$$

Dessa equação segue-se que, aparentemente, temos duas alternativas para a velocidade inicial: $v_{0y} = \pm 8$ m/s.

Qual delas escolher? Como se trata da velocidade inicial de lançamento vertical para cima e, portanto, no mesmo sentido do eixo 0*y*, devemos escolher o sinal positivo para a velocidade. Assim, a velocidade de lançamento é $v_{0y} = +8$ m/s $\cong$ 29 km/h.

Em resumo: a telha deve ser lançada verticalmente para cima com velocidade aproximadamente igual a 29 km/h (8 m/s).

8.6 Movimento numa Calha

Pode-se estudar, mais facilmente, o movimento uniformemente variado fazendo uso de uma calha. O arranjo experimental é reproduzido na **Figura 8.14**. A ideia é a de, reduzindo-se o valor do ângulo da calha, reduzir a aceleração do móvel. Isso é importante, porque os objetos caem muito rápido e, usualmente, é difícil verificar experimentalmente a validade das equações **8.47** e **8.48**. Galileu foi o primeiro a fazer isso. Fazia rolar bolas de canhão por uma calha de cerca de 5 metros.

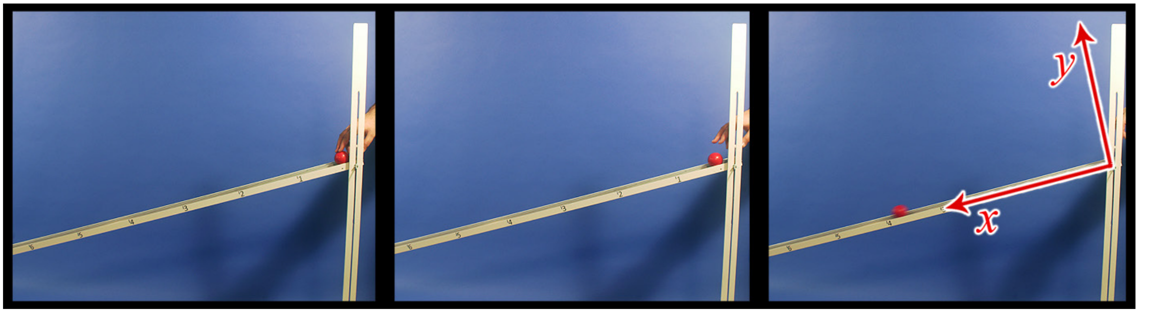

Figura 8.14: Galileu, a calha (fotos) e o sistema de referência.

Sobre a bola atuam, desprezando a força de atrito, duas forças: a força normal e a força da gravidade (a força peso). Para um sistema de eixos adotado na figura, a componente *y* da força peso se anula com a normal, pois não existe movimento ao longo desse eixo. Portanto, devemos analisar apenas o movimento ao longo do eixo *x*. A componente *x* da força peso é constante e dada por:

$$P_x = mg\text{sen}\theta \tag{8.53}$$

Nesse caso, as equações que estipulam a posição e a velocidade de uma bola na calha, em função do tempo, são:

$$x(t) = \frac{g\text{sen}\theta}{2}t^2 + v_{0x}t + x_0$$
$$v_x(t) = g\text{sen}\theta t + v_{0x} \quad 8.54$$

- Exemplo 08:

Um bloco de massa m, apoiado em roletes sem atrito, solto em A, desliza numa calha (plano inclinado), de acordo com a **Figura 8.15**.

a. Determinar a aceleração do bloco como função do ângulo do plano inclinado.

b. Calcular θ de modo que a aceleração do bloco tenha intensidade 1 m/s².

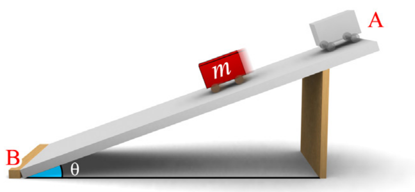

Figura 8.15: Bloco deslizante.

→ Resolução:

Como o atrito é considerado inexistente nos roletes, e não considerando a resistência do ar, as forças que atuam no bloco são duas: o seu peso $\vec{P}$ e a reação normal $\vec{N}$ do plano sobre o bloco (veja **Figura 8.16**).

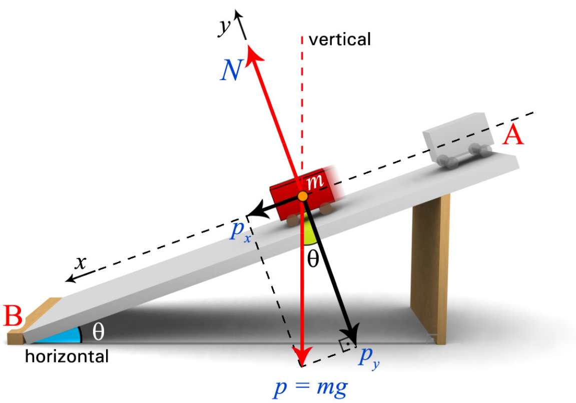

Figura 8.16: DCL do bloco. O referencial xy é adotado com o eixo x paralelo à calha. O peso é substituído pelas suas componentes p_x e p_y. $p_x = p\text{sen}\theta$ e $p_y = p\cos\theta$.

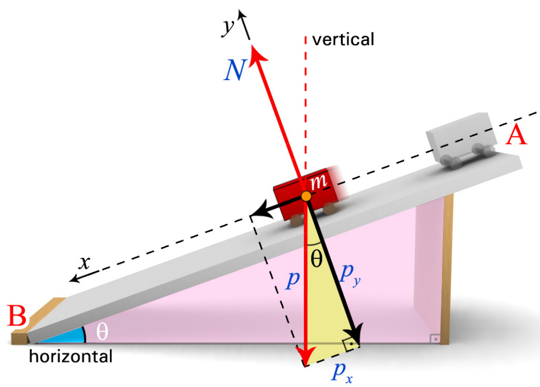

Figura 8.17: Os triângulos rosa e amarelo são retângulos e semelhantes. O ângulo entre a vertical e o eixo y é θ, igual ao da direção da calha e com a horizontal.

a. Aceleração do bloco.

Para determinar a aceleração do bloco, vamos aplicar a 2ª Lei de Newton nas direções x e y, conforme o DCL acima, e levando-se em conta o referencial escolhido, temos:

- **Direção *y*.** As forças nesta direção são $\vec{N} = N \cdot \vec{j}$ e $\vec{p}_y = -[p \cdot \cos\theta] \cdot \vec{j}$. Assim, nesta direção, a 2ª Lei de Newton adquire a forma: $\sum \vec{F}_y = \vec{N} + \vec{p}_y = m \cdot \vec{a}_y$. Substituindo-se $\vec{N}$ e $\vec{p}_y$ por suas expressões cartesianas, temos:

$$m \cdot \vec{a}_y = [N - p \cdot \cos\theta] \cdot \vec{j} \tag{8.55}$$

O bloco não se movimenta nesta direção → $\vec{a}_y = 0$; isso implica que

$$N = p\cos\theta = (mg)\cos\theta \tag{8.56}$$

- **Direção *x*.** A única força resultante que atua nesta direção é a componente $p_x = p \cdot \text{sen}\theta = mg \cdot \text{sen}\theta$. Portanto, na direção x, escrevemos:

$$\sum \vec{F}_x = (mg \cdot \text{sen}\theta)\vec{i} = m \cdot \vec{a}_x = ma_x\vec{i} \tag{8.57}$$

Em resumo: uma vez que $a_y = 0$, o bloco desliza calha abaixo com aceleração tal que sua componente ao longo do bloco é:

$$a_x = g \cdot \text{sen}\theta \tag{8.58}$$

b. Determinação de θ que resulta numa aceleração do bloco igual a 1 m/s².

Do item anterior temos: $a_x = g \cdot \text{sen}\theta$. A aceleração do bloco depende linearmente de senθ. Quando θ = 90°, a sua aceleração é máxima, pois para esse valor do ângulo a função senθ assume valor máximo (sen90° = 1). Para θ = 0° a aceleração é nula, pois sen0° = 0.

Para que ângulo a aceleração do bloco calha abaixo é $a_x = 1$ m/s²?

De **8.57**, e adotando-se $g = 10$ m/s², temos:

$$1 \text{ m/s}^2 = (10 \text{ m/s}^2) \cdot \text{sen}\theta \therefore \text{sen}\theta = 1/10 = 0{,}1$$

Donde obtemos

$$\theta = \text{arcsen}(0{,}1) \cong 5{,}7°$$

- Exemplo 09:

Um bloco de massa m, apoiado em roletes, solto no ponto A, desliza sobre uma calha. Admita $g = 10\ \text{m/s}^2$ e que existe atrito entre a calha e o bloco. O coeficiente de atrito dinâmico é $\mu = 0{,}3$.

a. Determinar a aceleração do bloco para $\theta = 37°$ ($\text{sen}37° = 0{,}60$ e $\cos 37° = 0{,}80$).

b. Com que velocidade o bloco atinge o ponto B se AB = 2 m?

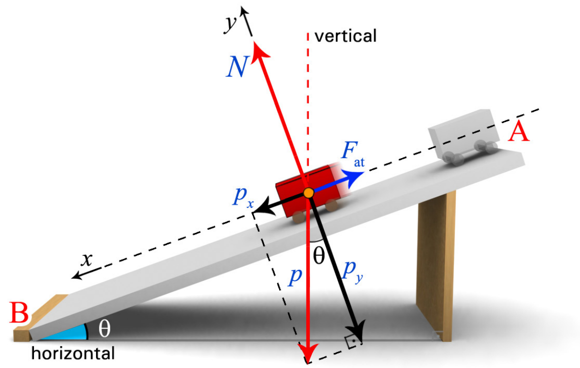

Figura 8.18

→ Resolução:

a. Determinar a aceleração do bloco para $\theta = 37°$

Consideramos o DCL da **Figura 8.18** e o referencial igual ao do Exemplo 8. Devemos considerar o sentido da força de atrito como oposta ao sentido do movimento e com componente apenas na direção x. Assim, em termos de componentes, escrevemos a segunda lei de Newton como:

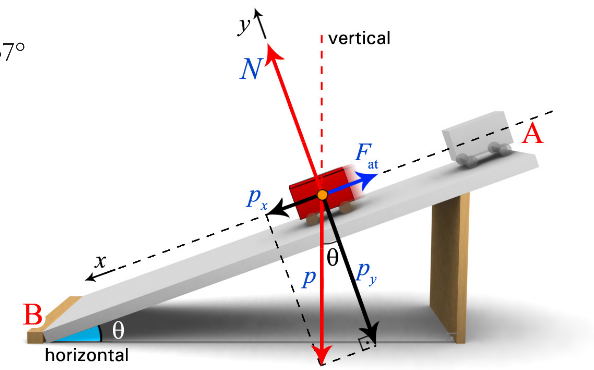

Figura 8.19

$$ma_y = N - p_y = N - p\cos\theta = N - mg\cos\theta$$
$$ma_x = p_x - F_{at} = mg\text{sen}\theta - F_{at} \quad 8.59$$

Como não existe movimento na direção y, obtemos da primeira equação:

$$N = mg\cos\theta \quad 8.60$$

Levando-se em conta que a força de atrito pode ser expressa como $F_{at} = \mu N$, e substituindo-se essa expressão bem como a expressão **8.60** em **8.59**, obtemos:

$$m \cdot a_x = mg\text{sen}\theta - \mu\left(mg\cos\theta\right) \quad 8.61$$

e, portanto, nesse caso, a aceleração é dada por:

$$a_x = g\left(\text{sen}\theta - \mu\cos\theta\right) \quad 8.62$$

Levando-se em conta os dados do problema, ou seja, $\theta = 37°$; $g = 10$ m/s² e $\mu = 0,3$, obtemos:

$$a_x = \left(10\ \text{m/s}^2\right)\left(0,60 - (0,3)\cdot 0,80\right) = 3,6\ \text{m/s}^2$$

Observe que, se não tivéssemos o atrito (nesse caso, $\mu = 0$ na equação **8.62**), a aceleração seria

$$a_x = \left(10\ \text{m/s}^2\right)\left(0,60 - (0)\cdot 0,80\right) = 6\ \text{m/s}^2$$

b. Com que velocidade o bloco atinge o ponto B se AB = 2 m?

O movimento do bloco plano abaixo é uniformemente acelerado ($a_x = 3,6$ m/s²). Adotando-se o instante inicial ($t = 0$) quando o bloco inicia o seu movimento, as condições iniciais são: $v_{x0} = 0$ e $x_0 = 0$). Assim, as equações horárias do espaço e da velocidade (adotando a origem do eixo $0x$ no ponto A),

$$\begin{aligned} x(t) &= (1/2)(3,6)t^2 = (1,8)t^2 \\ v_x(t) &= (3,6)t \end{aligned} \qquad 8.63$$

O bloco atinge o ponto B distante 2 m da origem (o ponto B) quando a coordenada x do móvel for igual a esse valor. Esse instante t_B, que é o instante em que o bloco chega ao ponto B, é dado, de acordo com **8.63**, pela raiz positiva da expressão quadrática:

$$x(t_B) = 2\ \text{m} = (1,8)t_B^{\,2} \Rightarrow t_B = \sqrt{\frac{2}{1,8}}\ \text{s}$$

Nesse instante de tempo, a velocidade do bloco será:

$$v_x(t_B) = 3,6t_B = 3,6\sqrt{\frac{2}{1,8}} \cong 3,8\ \text{m/s}$$

Agora é sua vez...

Acesse o Ambiente Virtual de Aprendizagem e realize a(s) atividade(s) proposta(s).