MOVIMENTO CIRCULAR 9

Gil da Costa Marques

9.1 Introdução: Movimento Circular

9.1.1 Movimentos circulares na Antiguidade

Movimentos circulares formaram a base para a descrição dos movimentos ao longo de mais de dois milênios. Em particular, a crença na geometria como manifestação da divindade levou Platão (428–348 a.C.) e vários filósofos gregos a descrever o movimento dos corpos celestes a partir do uso de trajetórias perfeitas o que, nesse caso, equivaleria a trajetórias circulares. Assim, os primeiros filósofos, matemáticos e astrônomos tratavam de descrever os movimentos dos planetas e da Lua, bem como o movimento aparente do Sol, a partir do uso de trajetórias circulares. Harmonia e perfeição requereriam, ainda, movimentos uniformes. Circulariam os astros em torno da Terra, porque ocuparíamos um lugar especial no Universo. Nessa visão, estaríamos muito próximos do centro do Universo.

Cinco dos astros conhecidos àquela época (Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno) exibiam, no entanto, movimentos complexos. Pareciam corpos celestes errantes. Por isso deram-lhes o nome de Planetas (errantes em grego). Um dos movimentos mais intrigantes é conhecido como movimento retrógrado. Nele, os Planetas parecem parar num determinado ponto ao longo do seu percurso e, num instante seguinte, retrocedem. Eudóxio de Cnido (489–347 a.C.) descobriu a solução para a descrição do movimento errante dos planetas, preservando, no entanto, a ideia da perfeição. Propunha que os planetas se moveriam em pequenos círculos denominados epiciclos, cujos centros de curvatura se moveriam em círculos com raios de curvaturas maiores. Estes últimos são denominados deferentes. Seu modelo, bastante engenhoso, fazia uso de 27 esferas cristalinas concêntricas.

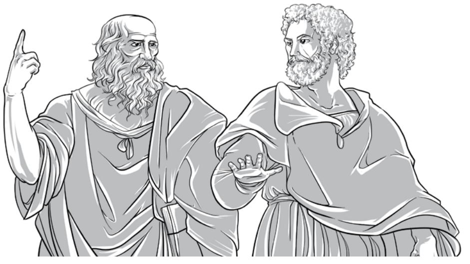

Figura 9.1: Platão e Aristóteles.

9.1.2 Epiciclos

Uma da falhas do sistema de esferas homocêntricas é sua previsão de que a distância entre a Terra e os planetas não variariam muito ao longo do tempo. Observa-se, no entanto, que o brilho (e, portanto, a distância) dos planetas varia apreciavelmente. Um modelo mais requintado baseado nos epiciclos e deferentes, proposto por Cláudio Ptolomeu (90-168 d.C.), conseguiu superar essa falha. Ao fazê-lo, Ptolomeu consolidou o modelo aristotélico do movimento dos corpos celestes. O modelo de Ptolomeu introduziu duas importantes alterações em relação ao modelo de Eudóxio. Nele, o centro do deferente não coincidia com o centro da Terra (veja figura). Além disso, introduzia o equante, um ponto localizado numa posição oposta em relação ao centro do deferente, e à igual distância deste. Propunha, nesse modelo, que o movimento dos planetas seriam uniformes, mas apenas em relação a esse ponto.

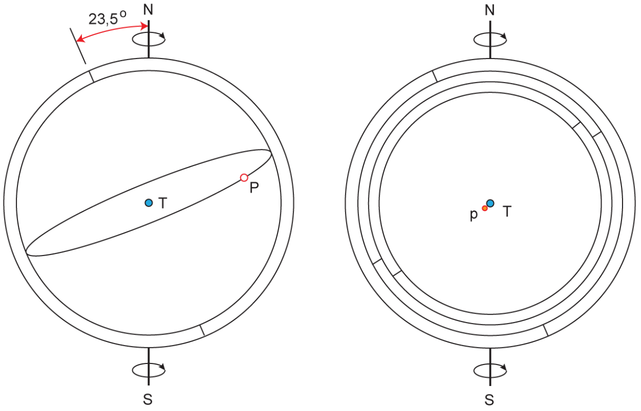

Figura 9.2: Modelo das esferas homocêntricas de Eudóxio. A primeira esfera (esq.) representa, na realidade, o movimento diurno da Terra. Outras esferas, tendo como centro a Terra, são sucessivamente articuladas a vários eixos, com diferentes inclinações.

O modelo de Ptolomeu conseguia fazer previsões sobre as posições dos planetas com grande precisão. Isto explica, em parte, a razão da sobrevivência da sua obra ao longo de, aproximadamente, 15 séculos.

Durante o Renascimento surge um novo método de investigação, baseado na observação e experimentação sistemática - o empirismo -, o qual é incorporado em definitivo na investigação dos fenômenos naturais. Para entendê-los não basta apenas um exercício de reflexão. Assim, a partir desse ponto na história, as ciências se distanciariam cada vez mais da filosofia. A incorporação do empirismo e do formalismo matemático ao método científico no estudo da natureza foi feita por Galileu Galilei (1564-1642). Por essa razão, ele é tido como o pai da ciência moderna.

Em seu livro *De Revolutionibus Orbitum Celestium* (sobre as Revoluções das Esferas Celestes) Nicolau Copérnico (1473-1543), embora o tenha feito de forma independente, retoma o modelo heliocêntrico aventado primeiramente por Aristarco de Samos (310-230 a.C). Na medida em que Copérnico buscava retomar o ideal da perfeição, consubstanciado na ideia de movimentos circulares uniformes sem a imperfeição dos equantes, sua teoria apesar de avançada era, na realidade, conservadora.

No modelo de Copérnico, o Sol seria o centro em torno do qual a Terra e os demais planetas se deslocariam em órbitas circulares e movimentos uniformes. Fez uso dos famosos epiciclos. A Terra era, assim, tratada como apenas mais um planeta. Ademais, conseguiu ordenar os planetas em função da distância até o Sol: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno. Os grandes deferentes externos, propostos por Ptolomeu e que simulam o movimento de revolução periódico, com período de 24 horas, da abóbada celeste são agora desnecessários, uma vez que Copérnico identifica tal efeito com a rotação da Terra. Concluiu que faria mais sentido a Terra girar do que o Universo todo.

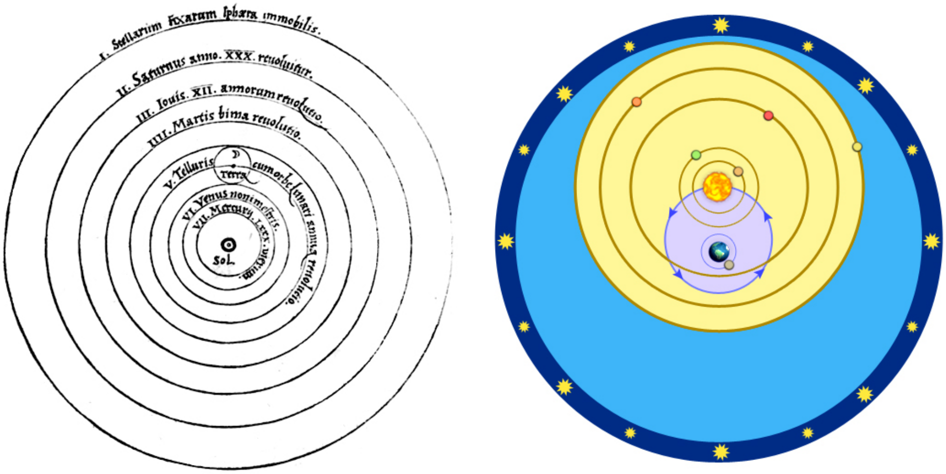

Figura 9.3: Ilustração do livro *Da Revolução dos Orbes Celestes*, de Copérnico, com o modelo heliocêntrico do sistema solar e do modelo de Tycho Brahe.

O modelo heliocêntrico de Copérnico proporcionava uma explicação mais simples e mais elegante para o movimento dos planetas do que o modelo de Ptolomeu. Havia uma economia de círculos e eliminava os equantes. Seu modelo conseguia prever que as velocidades dos planetas seriam tanto maiores quanto mais próximos estavessem do Sol. Assim, os movimentos retrógrados têm, no modelo de Copérnico, uma explicação mais simples.

Os trabalhos de Copérnico despertaram grande interesse do ponto de vista observacional. É nesse contexto que se coloca o trabalho de Tycho Brahe (1546-1601), um astrônomo dinamarquês de família nobre. Ele é considerado o maior astrônomo observador da era pré-telescópica. Tycho Brahe refutava parcialmente o sistema copernicano por uma questão de coerência com as observações: ele não via paralaxe. Para resolver o impasse, Brahe propunha um sistema híbrido: os planetas orbitavam o Sol (como dizia Copérnico), mas este orbitava a Terra. O erro não estava propriamente na incoerência do raciocínio, mas na precariedade dos instrumentos da época, que eram incapazes de fornecer precisão melhor que 1 minuto de arco. As observações de Tycho Brahe serviram de base para Johannes Kepler (1571-1631), seu assistente, astrônomo e matemático, formular suas famosas leis do movimento planetário.

9.2 Newton e o Movimento Circular Uniforme

Foi Newton o primeiro a entender o movimento circular do ponto de vista da dinâmica. Newton analisou o movimento da Lua, a qual, como sabemos, tem uma trajetória praticamente circular. Com base nesse estudo, Newton estabeleceu as bases para a Teoria da Gravitação Universal.

A análise de Newton permitiu-lhe entender que o movimento circular uniforme é, de fato, acelerado. Não fosse por isso, e de acordo com a lei da inércia, o móvel sairia pela tangente. Nessa óptica, pode-se dizer que a Lua cai continuamente sobre a Terra sem, contudo, jamais atingi-la, e isso porque a Lua é continuamente atraída pela Terra por meio da força gravitacional.

9.3 Variáveis no Movimento Circular

No estudo do movimento circular, que ocorre no plano, lançamos mão das variáveis polares. A variável ρ, no entanto, é fixa e dada pelo valor R, o raio da circunferência, isto é:

$$\rho = R \tag{9.1}$$

E isso simplifica o estudo do movimento, uma vez que agora temos apenas uma variável angular, a qual deverá ser determinada em função do tempo a partir das leis de Newton, uma vez conhecidas as forças.

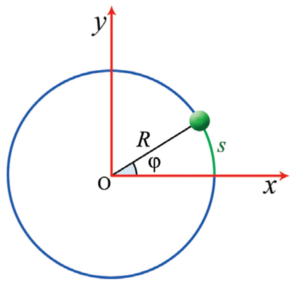

Figura 9.4: Variável angular na descrição do movimento.

Assim, a única variável no movimento circular é a variável φ, uma variável angular. No entanto, a partir dela e do raio da circunferência, podemos definir a variável espaço s, a qual é determinada a partir da distância percorrida ao longo do círculo. Escrevemos a relação:

$$s(t) = \varphi(t)R \tag{9.2}$$

Em **9.2** o arco s e o raio R devem ser expressas na mesma unidade de medida. Desse modo, a variável angular φ é expressa em "radianos" – rad. Assim, para caracterizar a posição de um móvel ao longo da circunferência, podemos recorrer a qualquer uma das duas alternativas: ou especificamos o espaço ao longo da circunferência ou o ângulo associado à sua posição. É nesse sentido que falamos de variável angular, pois podemos, através da determinação do ângulo, especificar a posição do objeto.

É importante estar atento ao sinal do ângulo. Atribuímos valores positivos à variável angular de acordo com a orientação do eixo da variável espaço. O mesmo se pode dizer dos valores negativos atribuídos à variável angular.

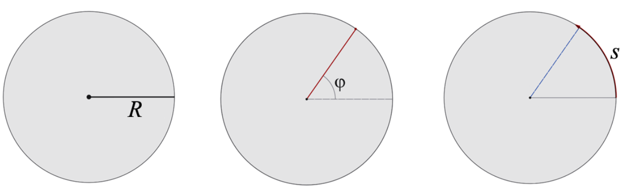

Figura 9.5: Variáveis do movimento circular.

No caso da coordenada espaço, procedemos da forma já conhecida, isto é, escolhemos um ponto ao longo da circunferência como origem dos espaços e depois orientamos os espaços.

Ao darmos uma volta completa ao longo da circunferência (isto é, ao voltarmos ao mesmo ponto de onde saímos) percorreremos uma distância dada por:

$$d = 2\pi R \tag{9.3}$$

Essa distância é conhecida como o comprimento da circunferência de raio R.

Assim, para um objeto em movimento sobre a circunferência, temos, utilizando coordenadas polares, que o vetor de posição é dado por:

$$\vec{r} = R\vec{e}_\rho \equiv R\left(\cos\varphi\vec{i} + \text{sen}\varphi\vec{j}\right) \tag{9.4}$$

- Exemplo 01:

Uma partícula move-se ao longo de uma trajetória circular contida no plano *xy*, conforme esquematizado na **Figura 9.6**. O raio da circunferência, nesse caso, é $R = 5$ m.

No instante $t_0 = 0$ ela passa pelo ponto *A*, que será adotado como ponto de referência para a determinação da coordenada espaço ao longo da circunferência (indicada pela letra *s*). A variável angular, $\varphi(t)$, é determinada a partir do ângulo que a reta iniciada na origem, e passando pelo ponto em questão, forma com o eixo $0x$. Ela assume valores positivos quando percorremos a circunferência no sentido anti-horário a partir da origem (o ponto *A* da **Figura 9.6**), e assume valores negativos quando percorrida no sentido horário.

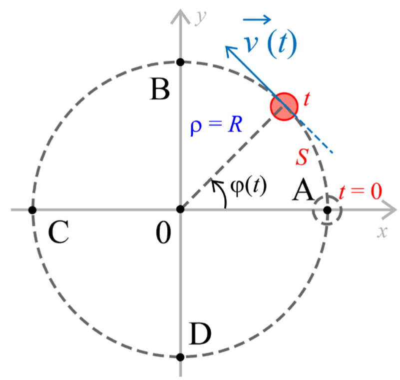

Figura 9.6: Partícula em movimento circular.

a. Escreva a expressão analítica do vetor posição $\vec{r}(t)$ e a coordenada espaço $s(t)$ para um instante de tempo qualquer (t).

b. Escreva as expressões para o vetor posição e a respectiva coordenada espaço quando a partícula passar pelos pontos *B* e *C*, conforme indicados na **Figura 9.6**.

→ Resolução:

a. Levando-se em conta que as coordenadas *x* e *y* são dadas como projeções sobre os respectivos eixos, e adotando-se o metro como unidade, temos:

$$x = 5\cos\varphi$$
$$y = 5\operatorname{sen}\varphi$$

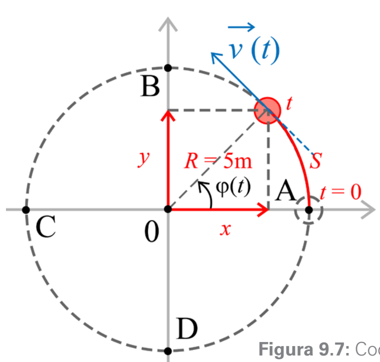

Figura 9.7: Coordenadas cartesianas no movimento circular.

Portanto, o vetor posição é dado por:

$$\vec{r}(t)=\left[5\cos\varphi(t)\right]\cdot\vec{i}+\left[5\text{sen}\varphi(t)\right]\cdot\vec{j}=5\left[\cos\varphi(t)\cdot\vec{i}+\text{sen}\varphi(t)\cdot\vec{j}\right] \quad 9.5$$

E a variável espaço, conforme a equação **9.2** do texto, é dada por:

$$s(t)=R\cdot\varphi(t)=5\varphi(t) \quad 9.6$$

b. No ponto B, o valor da variável angular é

$$\varphi_B=\frac{\pi}{2}\ \text{rad} \quad 9.7$$

Portanto, utilizando as expressões acima, obtemos:

- $\vec{r}_B=\left[5\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot\vec{i}+\left[5\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot\vec{j}=0\cdot\vec{i}+5\cdot\vec{j}\,(\text{m})$
- $s_B=5\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)=2,5\pi\,(\text{m})=7,85\ \text{m}$

No ponto C, o valor da variável angular é:

$$\varphi_B=\pi\ \text{rad}$$

Logo,

- $\vec{r}_C=\left[5\cos(\pi)\right]\cdot\vec{i}+\left[5\text{sen}(\pi)\right]\cdot\vec{j}=-5\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}\,(\text{m})$
- $s_C=5\cdot(\pi)=5\pi\,(\text{m})=15,7\ \text{m}$

9.4 Cinemática do Movimento Circular

9.4.1 Velocidade angular, velocidade escalar e velocidade vetorial

Definimos a velocidade angular como a taxa pela qual o ângulo se altera em função do tempo, ou seja, a velocidade angular é a taxa de variação instantânea da variável angular:

$$\omega(t)\equiv\frac{d\varphi(t)}{dt} \quad 9.8$$

A velocidade escalar, definida como a taxa pela qual os espaços mudam com o tempo, é dada, utilizando **9.6**, por:

$$v(t) \equiv \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dt}R = \omega(t)R \qquad 9.9$$

Observe que a velocidade vetorial, obtida mediante a derivação do vetor de posição com respeito ao tempo, é dada pela expressão:

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = R\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} \equiv R\frac{d\varphi}{dt}\left(\cos\varphi\vec{j} - \text{sen}\varphi\vec{i}\right) = R\omega\vec{e}_\varphi \qquad 9.10$$

Portanto, a velocidade é sempre tangente à circunferência e seu módulo é igual à velocidade escalar definida em **9.9**.

- Exemplo 02:

Admitamos que a variável angular associada ao movimento circular do Exemplo 01 varia segundo a lei:

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{20}.t \qquad 9.11$$

onde o tempo é medido em segundos e o ângulo é medido em radianos.

As condições iniciais constam da **Figura 9.8**.

a. Qual o intervalo de tempo necessário para a partícula completar uma volta?

b. Qual é a velocidade angular do movimento?

c. Qual é a velocidade escalar?

d. Qual é a velocidade vetorial?

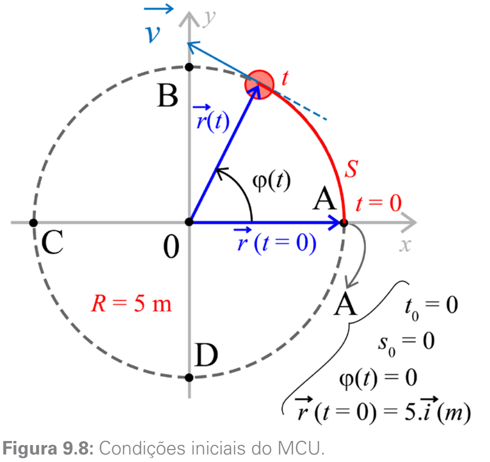

Figura 9.8: Condições iniciais do MCU.

→ Resolução:

a. Num instante $t = t_1$ a variável angular associada à partícula é $\varphi(t_1) = (\pi/20)\cdot t_1$ e, num instante posterior, $t = t_2$, ela é $\varphi(t_2) = (\pi/20)\cdot t_2$. A variação angular associada ao intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ é dada por:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{20}\left(t_2 - t_1\right) = \frac{\pi}{20}\Delta t \qquad 9.12$$

Ao completar uma volta, o vetor posição $\vec{r}(t)$ terá descrito um ângulo $\Delta\varphi = 2\pi$ rad; portanto, substituindo-se tal valor na expressão acima, obtemos:

$$2\pi = \frac{\pi}{20}\Delta t_{\text{volta}} \rightarrow \Delta t_{\text{volta}} = \left(2\pi\right)\cdot\frac{20}{\pi} = 40 \text{ s}$$

b. A velocidade angular pode ser determinada pela taxa de variação instantânea definida na equação **9.9**.

Assim, nesse caso, temos:

$$\omega\left(t\right) = \frac{d\varphi\left(t\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{\pi}{20}t\right)}{dt} = \frac{\pi}{20}\frac{d\left(t\right)}{dt} = \frac{\pi}{20} \text{ rad/s}$$

c. A partir da equação **9.10** temos a relação: $v(t) = R.\omega(t)$. Sendo $\omega(t) = (\pi/20)$ rad/s e $R = 5$ m, mediante uma simples substituição, obtemos:

$$v\left(t\right) = \left(5 \text{ m}\right)\left(\frac{\pi}{20} \text{ rad/s}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ rad}\cdot\text{m/s}$$

O “rad” é uma unidade adimensional. Assim,

$$v(t) = (\pi/4)\ \text{rad.m/s} = (\pi/4)\ \text{m/s}.$$

d. Temos duas alternativas equivalentes para responder a essa questão.

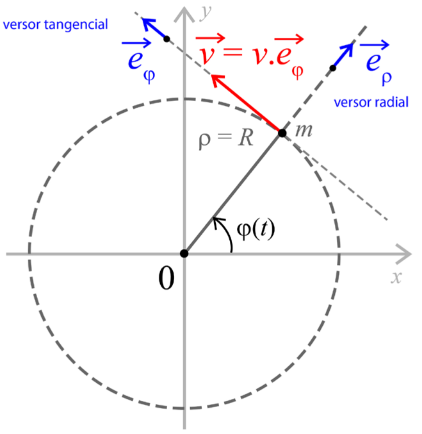

Figura 9.9: A velocidade é tangente à circunferência em cada ponto dela.

1ª alternativa: Na primeira delas, utilizamos a expressão do texto para a velocidade no movimento circular. Escrevemos:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{e}_\varphi = R\omega\vec{e}_\varphi = \left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{e}_\varphi\,(\text{m/s}) \qquad 9.13$$

onde $\vec{e}_\varphi$ é o versor na direção tangencial à circunferência, conforme ilustra a **Figura 9.9**.

Apesar de o módulo da velocidade ser constante ($v = \pi/4$ m/s), o vetor $\vec{v}$ é variável, pois o versor $\vec{e}_\varphi$ muda constantemente de direção, conforme a partícula se movimenta ao longo da circunferência, ou seja, depende da evolução, com relação ao tempo, da variável angular $\varphi(t)$.

2ª alternativa: Na segunda alternativa, escrevemos a expressão analítica do vetor posição em função da variável angular e dos versores nas direções *x* e *y*, conforme a equação **9.4** do texto e do vetor posição.

A derivada de primeira ordem em relação ao tempo fornece a velocidade vetorial. Substituindo $R = 5$ m e $\varphi(t) = (\pi/20.t)$ em **9.4** e derivando, temos:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[5\left(\cos\left(\frac{\pi}{20}.t\right).\vec{i} + \text{sen}\left(\frac{\pi}{20}.t\right)\cdot\vec{j}\right)\right]$$
$$= -5\left(\frac{\pi}{20}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi}{20}.t\right).\vec{i} + 5\left(\frac{\pi}{20}\right).\cos\left(\frac{\pi}{20}.t\right).\vec{j}$$
$$= -\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi}{20}.t\right).\vec{i} + \left(\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi}{20}.t\right).\vec{j}$$

Essa expressão mostra que $\vec{v}$ muda continuamente no decorrer do movimento, pois as funções cosseno e seno dependem do tempo. Por exemplo, para o instante $t = 0$, tem-se:

$$\vec{v}(t=0) = -\left(\frac{\pi}{4}\right).\text{sen}\left(\frac{\pi}{20}.0\right).\vec{i} + \left(\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi}{20}.0\right).\vec{j} = 0.\vec{i} + \left(\frac{\pi}{4}\right).\vec{j}$$

E, para o instante t = 10 s, tem-se:

$$\vec{v}\left(t=10\text{ s}\right)=-\left(\frac{\pi}{4}\right).\text{sen}\left(\frac{\pi}{20}.10\right).\vec{i}+\left(\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi}{20}.10\right).\vec{j}=-\left(\frac{\pi}{4}\right).\vec{i}+0.\vec{j}$$

Observe que o módulo de $\vec{v}$ é $v = \pi/4$ m/s, constante; o que muda são a direção e o sentido de $\vec{v}$.

- Exemplo 03:

a. Mostre, utilizando argumentos geométricos, que

$$\vec{e}_\rho=\left(\cos\varphi\right).\vec{i}+\left(\text{sen}\varphi\right).\vec{j}\quad \text{e}\quad \vec{e}_\varphi=-\left(\text{sen}\varphi\right).\vec{i}+\left(\cos\varphi\right).\vec{j} \tag{9.14}$$

b. Determine $(d\vec{e}_\rho)/dt$ e $(d\vec{e}_\varphi)/dt$, dado que a velocidade angular é constante.

→ Resolução

a. Os vetores $\vec{e}_\rho$ e $\vec{e}_\varphi$ são dois versores (vetores de módulos unitários) ao longo das direções radial e tangencial em cada ponto da trajetória.

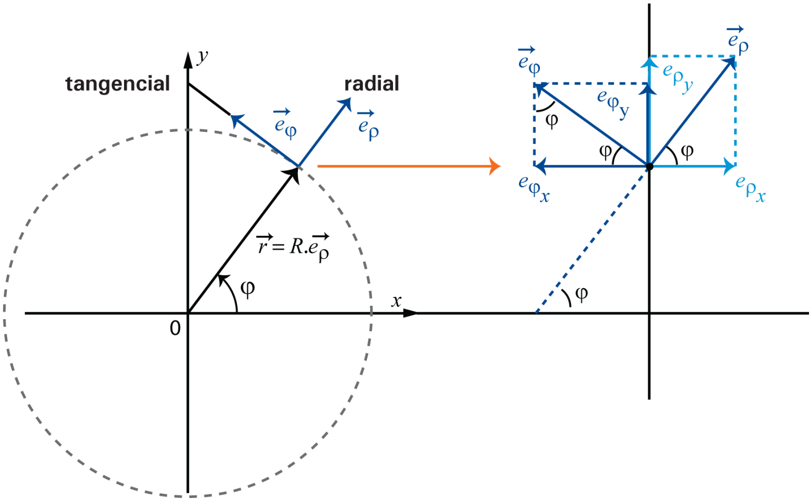

Figura 9.10: Versores tangenciais e radiais e suas projeções.

A **Figura 9.10** ilustra as direções tangencial e radial com os respectivos versores. No destaque, são mostradas as projeções de cada versor nas direções dos eixos 0x e 0y, que podem ser escritos conforme **9.15**.

$$\vec{e}_\varphi = -|\vec{e}_\varphi|\text{sen}\varphi.\vec{i} + |\vec{e}_\varphi|\cos\varphi.\vec{j} \qquad 9.15$$

Considerando-se que ambos são versores (vetores de módulo igual a 1) tem-se, da expressão acima, que:

$$\vec{e}_\varphi = -\text{sen}\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j} \qquad 9.16$$

Igualmente, utilizando argumentos geométricos, concluímos que:

$$\vec{e}_\rho = |\vec{e}_\rho|\cos\varphi.\vec{i} + |\vec{e}_\rho|\text{sen}\varphi.\vec{j} \qquad 9.17$$

Lembrando que $|\vec{e}_\rho| = 1$, da expressão acima, verifica-se o resultado já procurado:

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi.\vec{i} + \text{sen}\varphi.\vec{j} \qquad 9.18$$

A velocidade vetorial da partícula em Movimento Circular é $\vec{v} = v.\vec{e}_\varphi$. Se $v = \pi/4$ m/s; o vetor $\vec{v}$, expresso em termos dos versores cartesianos $\vec{i}$ e $\vec{j}$, é dado por:

$$\vec{v} = \left(\frac{\pi}{4}\right)\left(-\text{sen}\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j}\right) = -\left(\frac{\pi}{4}\right)\text{sen}\varphi.\vec{i} + \left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\varphi.\vec{i} \qquad 9.19$$

b. Utilizando a expressão **9.14**, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} &= \frac{d\left(-\text{sen}\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j}\right)}{dt} = \frac{d\left(-\text{sen}\varphi\right).\vec{i}}{dt} + \frac{d\left(\cos\varphi\right).\vec{j}}{dt} \\ &= \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\left(-\text{sen}\varphi\right)}{dt}.\vec{i} + \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\left(\cos\varphi\right)}{dt}.\vec{j} = \omega\left(-\cos\varphi\right).\vec{i} + \omega\left(-\text{sen}\varphi\right).\vec{j} \\ &= -\omega\left[\cos\varphi.\vec{i} + \text{sen}\varphi.\vec{j}\right]\end{aligned}$$

Portanto, de **9.14**, segue-se que:

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\omega.\vec{e}_\rho \qquad 9.20$$

Analogamente, de **9.14**, concluímos

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\left(\cos\varphi.\vec{i} + \text{sen}\varphi.\vec{j}\right)}{dt} = \frac{d\left(\cos\varphi\right).\vec{i}}{dt} + \frac{d\left(\text{sen}\varphi\right).\vec{j}}{dt}$$
$$= \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\left(\cos\varphi\right)}{dt}.\vec{i} + \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\left(\text{sen}\varphi\right)}{dt}.\vec{j} = \omega\left(-\text{sen}\varphi\right).\vec{i} + \omega\left(\cos\varphi\right).\vec{j}$$
$$= \omega\left[-\text{sen}\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j}\right] = \omega.\vec{e}_\varphi$$

e, portanto,

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \omega.\vec{e}_\varphi \quad 9.21$$

9.4.2 Aceleração angular, vetorial e centrípeta

Definimos a aceleração angular como a taxa, por unidade de tempo, pela qual a velocidade angular muda com o tempo:

$$\alpha(t) \equiv \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} \quad 9.22$$

enquanto a aceleração escalar ou tangencial, definida como a derivada com respeito ao tempo da velocidade escalar, se escreve como:

$$a_{\text{tang}}(t) \equiv \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d\omega(t)}{dt}R = \alpha(t)R \quad 9.23$$

Observe, no entanto, que a aceleração vetorial, dada por:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}\vec{e}_\varphi + R\omega\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = R\alpha\vec{e}_\varphi - R\omega^2\vec{e}_\rho \quad 9.24$$

tem duas componentes: aquela tangente à curva é igual à aceleração escalar ou tangencial dada por **9.23**; a outra componente – a componente radial – tem o nome de aceleração centrípeta e tem a forma geral calculada por Newton no caso do movimento uniforme. De fato, utilizando **9.24**, podemos escrevê-la de duas formas equivalentes:

$$\vec{a}_{\text{centrípeta}} = -R\omega^2\vec{e}_\rho = -\frac{\vec{v}^2}{R}\vec{e}_\rho \qquad 9.25$$

A aceleração centrípeta aponta sempre para o centro da circunferência, daí derivando o seu nome: aceleração que aponta para o centro.

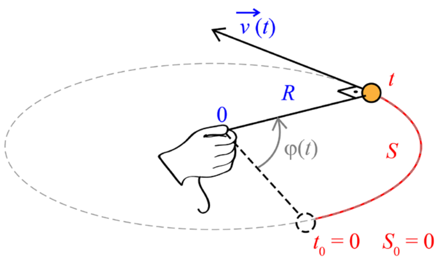

Figura 9.11: Movimento circular dotado de aceleração tangencial.

- Exemplo 04:

Um objeto é colocado em movimento circular de raio R = 1,2 m, conforme ilustra a **Figura 9.11**. Dado que a variável angular φ varia, em função do tempo (expresso em segundos), conforme a equação horária:

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{12}t^2 \qquad 9.26$$

a. Escrever as equações horárias da velocidade angular $\omega(t)$ e da aceleração angular $\alpha(t)$.

b. Escrever a equação horária para a velocidade escalar e a aceleração tangencial ou escalar. Particularizar para o caso t = 2 s.

c. Escrever a expressão da aceleração centrípeta do objeto em função do tempo e, em particular, para t = 2 s.

d. Escreva a expressão cartesiana da aceleração vetorial em função do tempo e, em particular, para t = 2 s.

→ Resolução:

a. As equações **9.9** e **9.22** do texto definem a velocidade e a aceleração angulares. Então, dado que a velocidade angular é a taxa de variação instantânea da variável angular, obtemos:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d\left[\frac{\pi}{12}t^2\right]}{dt} = \frac{\pi}{6}t \qquad 9.27$$

A aceleração angular é a taxa de variação instantânea da velocidade angular. Nesse caso, obtemos:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d\left[\frac{\pi}{6}t\right]}{dt} = \frac{\pi}{6} \ \text{rad/s}^2 \qquad 9.28$$

b. A função $s(t)$ pode ser obtida por meio da relação entre o ângulo e o raio, ou seja, nesse caso:

$$s(t) = R.\varphi(t) = (1,2)\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot t^2 = (0,1\pi)t^2 \qquad 9.29$$

Assim, no sistema SI, a velocidade escalar é dada por:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d\left[(0,1\pi)t^2\right]}{dt} = (0,2\pi)t \qquad 9.30$$

Donde se infere que, para $t = 2$ s, a velocidade é dada por:

$$v(t = 2\ \text{s}) = 0,4\pi \ \text{m/s}$$

A aceleração tangencial ou aceleração escalar é a taxa de variação instantânea da velocidade escalar. Assim sendo, para $v(t) = (0,2\pi)t$, e de acordo com a definição **9.22**, temos:

$$a_{\text{tang}} = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d(0,2\pi.t)}{dt} = 0,2.\pi \ \text{m/s}^2$$

Tendo em vista que a aceleração tangencial é constante, no instante $t = 2$s temos:

$$a_{\text{tang}} = 0,2.\pi \ \text{m/s}^2$$

c. A equação **9.25** define a aceleração centrípeta ou radial no caso de movimento circular. Para o instante $t = 2$ s, temos $v = 0,4.\pi$ m/s e, sendo $R = 1,2$ m, a aceleração centrípeta é dada por:

$$\vec{a}_{\text{centr}} = -\frac{\vec{v}^2}{R}\vec{e}_\rho = -\frac{(0,4\pi)^2}{1,2} \cdot \vec{e}_\rho = -\left(\frac{0,4\pi^2}{3}\right).\vec{e}_\rho$$

Nesse caso, a aceleração centrípeta tem módulo constante $a_{\text{centr}} = \left(\frac{0,4\pi^2}{3}\right)$m/s^2 e, como é usual, tem direção radial, apontando para o centro da circunferência.

d. A aceleração vetorial, conforme a expressão **9.24**, é dada por:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}\vec{e}_\varphi + R\omega\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = R\alpha\vec{e}_\varphi - R\omega^2\vec{e}_\rho \qquad 9.31$$

A aceleração vetorial pode, igualmente, ser expressa em termos das componentes tangencial e radial:

$$\vec{a} = a_{\text{tang}} \cdot \vec{e}_\varphi + a_{\text{radial}} \cdot \vec{e}_\rho = R\alpha\vec{e}_\varphi - \frac{v^2}{R}\vec{e}_\rho \qquad 9.32$$

Particularizando para $t = 2$ s, temos as componentes da aceleração dadas por:

$$a_{\text{tang}} = \frac{dv}{dt} = 0{,}2\pi \ \text{m/s}^2$$

$$a_{\text{radial}} = a_{\text{centr}} = \frac{-V^2}{R} = \frac{(0{,}4\pi)^2}{1{,}2}$$

Portanto, a aceleração vetorial no instante $t = 2$ s é

$$\vec{a}(t = 2\ \text{s}) = \left[\frac{2\pi}{10}\right]\vec{e}_\varphi - \left[\frac{2\pi^2}{15}\right]\vec{e}_\rho$$

9.5 A dinâmica do Movimento Circular

Neste momento, lançaremos mão das coordenadas polares para desenvolver o estudo do movimento circular à luz da dinâmica newtoniana.

Lembrando que as duas componentes da força – radial e azimutal (ou tangencial) - são definidas como projeções sobre os vetores da base definidos em **9.14**, temos, então, respectivamente:

$$F_\rho \equiv \vec{F} \cdot \vec{e}_\rho$$
$$F_\varphi \equiv \vec{F} \cdot \vec{e}_\varphi \qquad 9.33$$

E a equação de Newton, em coordenadas polares, assume a forma:

$$\boxed{\begin{aligned} ma_\rho &= F_\rho \\ ma_\varphi &= F_\varphi \end{aligned}} \qquad 9.34$$

(onde $a_\rho = a_{\text{centr}}$ e $a_\varphi = a_{\text{tang}}$), a qual tem uma forma semelhante à da equação de Newton em coordenadas cartesianas. Lembrando, de **Cinemática Vetorial**, que a aceleração vetorial em coordenadas polares é dada por:

$$\vec{a} \equiv \left\{ \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right\} \vec{e}_\rho + \left\{ 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} \right\} \vec{e}_\varphi \qquad 9.35$$

as equações se transformam agora em equações para as coordenadas ρ e φ. Essas equações são:

$$\begin{aligned} m\left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right) &= F_\rho \\ m\left(2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} \right) &= F_\varphi \end{aligned} \qquad 9.36$$

No caso do movimento circular, vemos, a partir das equações acima, que ele ocorre desde que sejam satisfeitas as seguintes condições:

$$\begin{aligned} -mR\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 &= F_\rho \\ mR\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= F_\varphi \end{aligned} \qquad 9.37$$

A primeira equação de **9.37** implica que a componente radial da força deve ser igual à massa vezes a aceleração centrípeta:

$$a_{cp} = -R\omega^2 \qquad 9.38$$

daí implicando que o movimento circular só ocorre se a força que age sobre a partícula tiver uma direção radial, isto é, dirigida para o centro, de tal forma que:

$$F_\rho = -mR\omega^2 = -m\frac{v^2}{R} \quad 9.39$$

enquanto a segunda equação é equivalente à condição de que a massa vezes a aceleração escalar ou tangencial seja igual à componente da força na direção tangencial à circunferência. Em termos de aceleração escalar, escrevemos:

$$m \cdot a_{\text{tang}}(t) = mR\alpha(t) = F_\varphi \quad 9.40$$

- **Exemplo 05:**

Um carro com massa total de 800 kg entra numa curva de raio R = 500 m com velocidade v_0 = 40 m/s e aceleração tangencial (nesse caso, igual à aceleração escalar) a_{tang} = 6 m/s². A pista está contida num plano horizontal e o atrito é suficiente para manter o carro na trajetória circular sem escorregamentos.

a. Qual a força tangencial?

b. Qual a força radial no instante em que ele adentra a curva?

→ Resolução

A **Figura 9.12** representa o DCL do carro. Nela apresentamos três direções associadas a uma determinada posição do carro: a vertical (normalmente associada ao eixo z); a radial, associada à componente do versor $\vec{e}_\rho$ e a componente tangencial à trajetória circular, associada ao termo da velocidade vetorial contendo o versor $\vec{e}_\varphi$.

Na direção vertical, atuam a força gravitacional $\vec{p}$ e a reação $\vec{N}$ da pista sobre os pneus do carro. Nessa direção tem-se equilíbrio; logo,

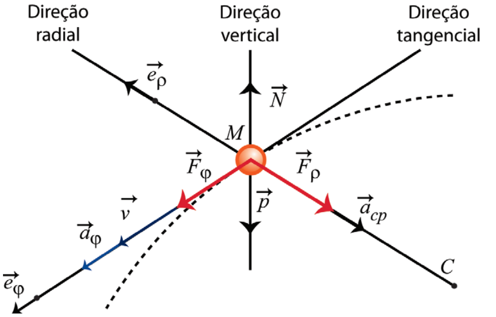

Figura 9.12: Diagrama de corpo livre e as componentes polares das forças.

$$\vec{N} = -\vec{p}$$

Para a direção tangencial escrevemos:

$$F_\varphi \vec{e}_\varphi = ma_\varphi \vec{e}_\varphi = mR\alpha\vec{e}_\varphi \qquad 9.41$$

onde $a_\varphi = R\alpha$ é a aceleração escalar (tangencial à trajetória) e α é a aceleração angular.
Na direção radial, a força é igual ao produto da massa pela aceleração centrípeta:

$$\vec{F}_{\text{rad}} = F_\rho \vec{e}_\rho = -m\frac{v^2}{R}\vec{e}_\rho \qquad 9.42$$

Se o carro se movimentar com velocidade escalar constante (o velocímetro registrando velocidade de mesmo valor), a aceleração tangencial é $a_\varphi = 0$ e a força tangencial, por consequência, é nula. Esse não é o caso aqui considerado.

a. Força tangencial.

Dado que o carro tem uma aceleração tangencial constante, da lei de Newton resulta que:

$$\vec{F}_\varphi = m.\vec{a}_\varphi = 800(\text{kg})\left(6\ \text{m/s}^2\right).\vec{e}_\varphi = 4.800.\vec{e}_\varphi \qquad (\text{newtons})$$

b. Força na direção radial.

Vamos considerar o instante no qual ele adentra a curva, o instante em que $v = 40$ m/s. Da expressão **9.42** segue-se que, quando expressa em newtons, a força radial é dada por

$$F_\rho \vec{e}_\rho = 800 \times \left[-\frac{(40)^2}{500}\right]\vec{e}_\rho = 800\ \text{kg} \times \left(-3{,}2\ \text{m/s}^2\right)\vec{e}_\rho = -2.560\vec{e}_\rho$$

O sinal negativo indica que o sentido da força radial é aquele que aponta para o centro da circunferência de raio R.

9.6 Movimento Circular Uniforme

O movimento circular uniforme ocorre quando a aceleração tangencial se anula e, portanto, quando for nula a componente tangencial da força:

$$F_\varphi = 0 \tag{9.43}$$

Portanto, de **9.40** segue-se que, no movimento circular uniforme, a aceleração tangencial ou escalar se anula:

$$a_\varphi = a_{\text{tang}} = 0$$

e como consequência a aceleração angular

$$\alpha(t) = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0, \text{ pois } \alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} \tag{9.44}$$

Para a ocorrência de movimento circular uniforme faz-se necessário, assim, que a força seja uma força central, isto é, que a força aponte sempre para o centro. Essa exigência vem da equação **9.42**:

$$F_\rho = ma_\rho \tag{9.45}$$

Como vimos anteriormente, a força central deve ser sempre atrativa e isso decorre da equação:

$$-mR(\omega_0)^2 = F_\rho \tag{9.46}$$

Assim, é importante entender que a despeito de o movimento ser uniforme, ele é um movimento acelerado.

O movimento circular uniforme é um movimento periódico que se repete a intervalos de tempo regulares. O seu período é dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{9.47}$$

- Exemplo 06:

Um disco (B) de massa m = 2 kg é posto em MCU de raio R = 0,5 m sobre uma plataforma horizontal sem atrito. A velocidade escalar é constante e dada por: v = 1 m/s. Ele é preso à extremidade de um fio leve e flexível, que passa por um orifício através do qual ele pode deslizar sem atrito. Na outra extremidade do fio pende um objeto, A, que permanece no mesmo nível em relação ao solo (sem subir nem descer). Adotando-se g = 10 m/s²; pergunta-se:

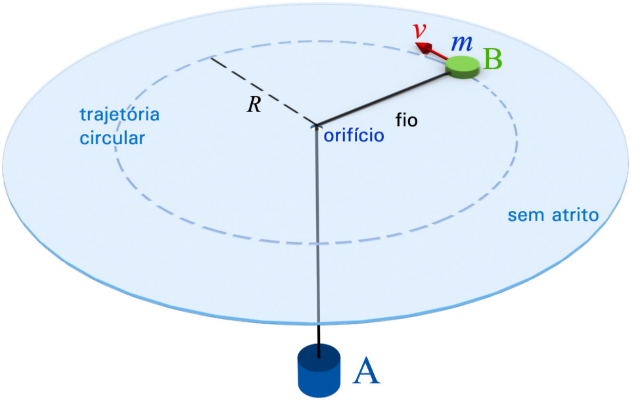

Figura 9.13: O peso do objeto A pode manter o objeto B em movimento circular uniforme.

a. Qual a aceleração do objeto?

b. Qual o período do movimento circular executado pelo disco?

c. Qual o peso do objeto A dependurado na extremidade do fio?

→ Resolução:

a. O movimento é circular e uniforme; logo, a aceleração tangencial é nula. Portanto, a velocidade escalar é constante. A aceleração centrípeta tem componente radial dada por:

$$a_{cp} = -\frac{v^2}{R} = \frac{-\left(1\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0{,}5\ \text{m}} = -2\ \text{m/s}^2$$

Sendo $a_\varphi = a_{tang} = (dv)/(dt) = 0$, a aceleração do objeto tem apenas a componente centrípeta ($a_{cp} = -2$ m/s²), ou seja,

$$\vec{a}_{cp} = -2.\vec{e}_\rho\left(\text{m/s}^2\right)$$

O versor $\vec{e}_\rho$ tem direção radial e aponta para fora do centro da circunferência. A aceleração centrípeta aponta, portanto, para o centro da circunferência. Daí o sinal negativo.

b. De acordo com a equação **9.10**, podemos escrever $v = \omega_0 \cdot R$, onde ω_0 = velocidade angular constante do MCU. Substituindo, na equação **9.47** que define o período no MCU, temos:

$$T = \frac{2\pi}{\frac{v}{R}} = \frac{2\pi R}{v} \tag{9.48}$$

Substituindo as grandezas v = 1 m/s e R = 0,5 m, temos: $T = \frac{2 \times 3{,}14 \times 0{,}5\ \text{m}}{1\ \text{m/s}} = 3{,}14\ \text{s}.$

Portanto, o objeto percorre a circunferência de raio R = 0,5 m em 3,14 s.

c. Vamos desenhar um DCL do objeto em MCU.

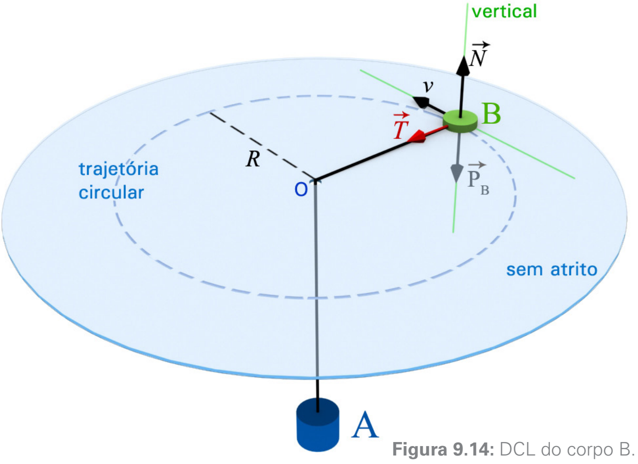

Figura 9.14: DCL do corpo B.

Sobre o objeto (**Figura 9.14**) atuam três forças: duas na direção vertical, que se anulam ($\vec{N} = -\vec{P}_B$), pois o objeto não se move nessa direção. Na direção radial, por outro lado, atua apenas a força tensora T do fio.

Como o objeto A não sobe nem desce, ele se encontra em equilíbrio, ou seja, T = peso de A. Portanto, a força radial é, em módulo, igual ao produto da massa pela aceleração centrípeta:

$$T = m.\frac{v^2}{R} = 2\ \text{kg}\left(\frac{\left(1\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0{,}5\ \text{m}}\right) = 2\ \text{kg} \times 2\ \ \text{m/s}^2 = 4\ \text{newtons}$$

Dessa expressão, segue-se que: o peso de A = mg = T = 4 newtons.

- Exemplo 07:

A massa m de um pêndulo simples de comprimento $L = 5$ m é solta de uma determinada altura e passa no ponto mais baixo de sua trajetória (ponto B da **Figura 9.15**) com velocidade $v = 6$ m/s. Sendo $m = 4$ kg, qual a intensidade da força tensora no fio no ponto B? Desprezar a resistência do ar e considerar $g = 10$ N/kg $= 10$ m/s².

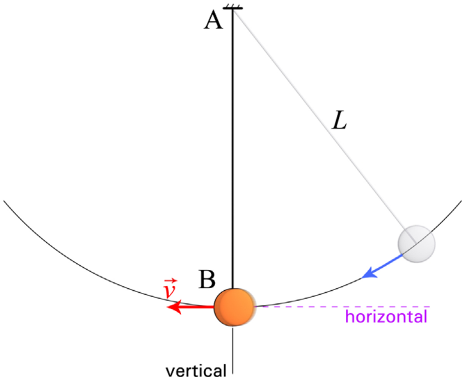

Figura 9.15: Pêndulo no seu ponto mais baixo.

→ Resolução:

Para analisar o movimento, consideremos o DCL da massa pendular num ponto qualquer de sua trajetória circular (**Figura 9.16**).

Na massa presa ao fio atuam duas forças: a força tensora do fio $\vec{T}$ e o peso $\vec{p}$.

Com a escolha dos eixos da **Figura 9.16**, as componentes da força peso são:

- $p_\rho = \vec{p} \cdot \vec{e}_\rho = p\cos\varphi$ (componente radial da força peso)
- $p_\varphi = \vec{p} \cdot \vec{e}_\varphi = p\,\text{sen}\varphi$ (componente tangencial da força peso).

A força tensora $\vec{T}$ atua sempre na direção radial.

Considerando que nesse ponto a velocidade tangencial (ou escalar) seja v, podemos escrever, usando a 2ª Lei de Newton:

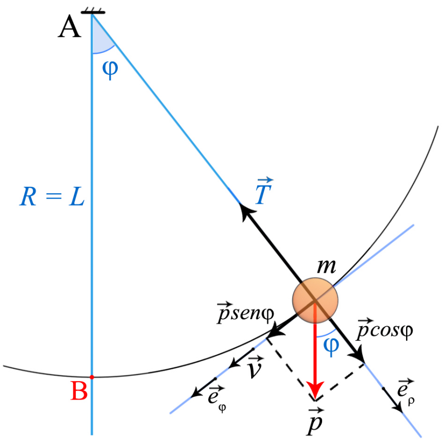

Figura 9.16: DCL do corpo de massa m.

Direção tangencial	Direção radial
$F_{tang} = F_\varphi = p\,\text{sen}\varphi = m.a_{tang}$ $a_{tang} = a_\varphi = \dfrac{p\,\text{sen}\varphi}{m} = \dfrac{mg\,\text{sen}\varphi}{m} = g\,\text{sen}\varphi$ Portanto: $a_{tang} = a_\varphi = g\,\text{sen}\varphi$	$F_{radial} = F_\rho = -m\left(\dfrac{v^2}{L}\right) = -T + p\cos\varphi$ Portanto: $T = m(v^2/L) + p\cos\varphi$

O que ocorre com os módulos da aceleração escalar a_{tang} e da força tensora T conforme a massa pendular se mova em direção ao ponto B?

À medida que o ângulo φ decresce, o valor de senφ decresce e o de cosφ cresce. Desse modo, a aceleração tangencial ($a_{tang} = g$senφ) decresce e a tração $T = m(v^2/L) + p\cos\varphi$ aumenta (devido ao crescimento de $p\cos\varphi$ e da velocidade).

Quando a massa pendular passar pelo ponto B, o ângulo φ = 0° → sen0° = 0 e cos0° = 1 e, portanto, no ponto B temos:

Direção tangencial	Direção radial
$a_{\text{tang(B)}} = a_{\varphi(\text{B})} = 0$	$T_\text{B} = m\left(\dfrac{v^2{}_\text{B}}{L}\right) + p$ $T_\text{B} = (4\text{ kg})\left(\dfrac{\left(6\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{5m}\right) + (4\text{ kg} \times 10\text{ N/kg})$ $T_\text{B} = 68{,}8\ \text{ newtons}$

9.7 Movimento Circular num Campo Gravitacional

A ideia de descrever o movimento dos astros no céu a partir de órbitas circulares é de Platão. Foi aperfeiçoada pelos seus seguidores, especialmente com a ideia dos epiciclos. Platão não estava muito enganado. Os planetas se movem em órbitas elípticas, mas órbitas circulares são possíveis. Uma circunferência é um caso particular de uma elipse.

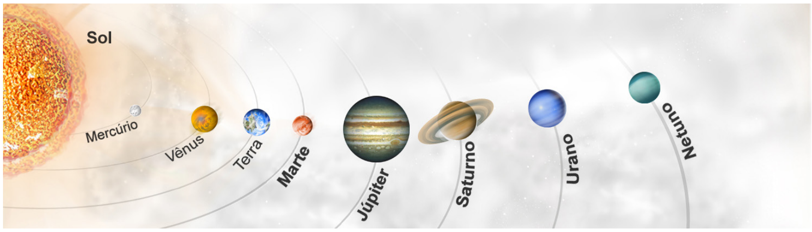

Figura 9.17: Sistema solar: órbitas quase circulares.

No caso da força gravitacional exercida por um objeto esférico de massa *M* sobre um objeto de massa *m*, escrevemos essa força em coordenadas polares da seguinte forma:

$$\vec{F} = -\frac{mMG}{\rho^2}\vec{e}_\rho \quad 9.49$$

Sendo *R* o raio da órbita circular, a lei de Newton se escreve, de acordo com **9.25**, da seguinte forma:

$$ma_{\text{cp}} = -\frac{1}{R^2}mMG \quad 9.50$$

Como a aceleração centrípeta é dada por

$$a_{\text{cp}} = -R(\omega_0)^2 = -\frac{v^2}{R} \quad 9.51$$

de **9.51**, segue-se que a velocidade angular é dada, em função do raio, pela seguinte expressão:

$$\omega^2 = \frac{MG}{R^3} \quad 9.52$$

O aspecto relevante no movimento circular num campo gravitacional é a existência de uma relação bastante geral entre a velocidade angular e o raio da trajetória e essa relação é:

$$\boxed{\omega_0{}^2 R^3 = MG} \quad 9.53$$

Ela é o análogo da lei de Kepler quando aplicada para o movimento circular. De fato, de **9.53** e **9.47**, segue-se que o quadrado do período numa órbita circular é proporcional ao cubo do "semieixo maior" de uma esfera (pois o seu semieixo maior coincide com o semieixo menor). De fato, substituindo **9.47** em **9.53**, obtemos, para o período,

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{MG}R^3 \quad 9.54$$

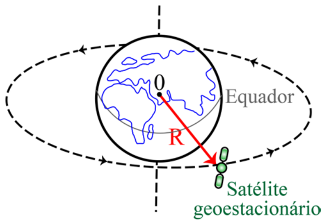

Figura 9.18: Satélite geoestacionário.

Dessa relação segue-se que a cada período corresponde um valor do raio. De grande interesse para as telecomunicações são os satélites geoestacionários. Neles, o período é igual ao período de rotação da Terra.

$$T = T_{rot} = 24 \text{ horas} \qquad 9.55$$

Nesse caso, o satélite fica sempre num ponto fixo acima da superfície terrestre. A distância nesse caso é: h = 35,786 km.

- Exemplo 08:

Os satélites "geoestacionários" são aqueles que se encontram "parados" em relação a um ponto fixo na superfície terrestre (em geral, sobre a linha do equador terrestre). Por isso, são usados como satélites de comunicação. Considere um satélite geoestacionário com órbita circular de raio R concêntrica com o globo terrestre.

Adotando um referencial polar com centro no planeta Terra, determinar:

a. O período T_{sat} do movimento circular do satélite.

b. Raio R da órbita do satélite.

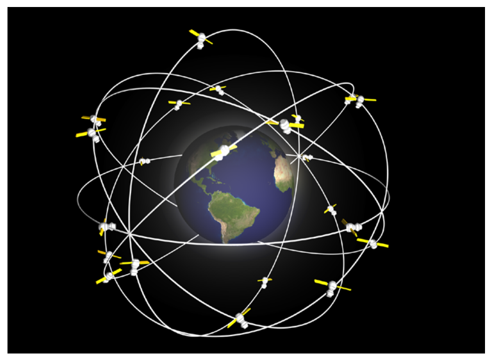

Figura 9.19: Qual deve ser a altura do satélide para que ele fique estacionário?

→ Resolução:

a. A condição para que um satélite seja geoestacionário é equivalente à condição de que sua velocidade angular (ω_{sat}) seja igual à velocidade angular associada ao deslocamento de um ponto no equador terrestre:

$$\omega_{eqd} = \frac{2\pi}{T_{rot}} \qquad 9.56$$

$$\omega_{eqd} = \omega_{sat} \qquad 9.57$$

Para isso, basta que os períodos sejam iguais. Tendo em vista que o período de rotação da Terra é de 24 horas, temos:

$$T_{sat} = T_{rot} \cong 24 \text{ h} = 86.400 \text{ s} \qquad 9.58$$

b. A força na direção radial que age sobre o satélite é a força de atração gravitacional entre o satélite e a Terra. Ela o atrai para o centro da Terra. Denominando m a massa do satélite, e lembrando que a massa da Terra é $M = 6 \times 10^{24}$ kg; que a constante da gravitação universal é dada por $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ (Nm²)/kg² e denominando R como a distância do satélite até o centro da Terra, podemos escrever:

$$F_{radial} = F_{gravitacional} \qquad 9.59$$

A partir da lei de Newton podemos escrever:

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{M.m}{R^2} \qquad 9.60$$

donde inferimos que $R = G\dfrac{M}{v^2}$. Lembramos que $v = \omega R = \dfrac{2\pi R}{T}$. Assim, em termos do período, a distância até o centro da Terra obedece à relação

$$R^3 = G\frac{MT^2}{4\pi^2}$$

A partir dos dados já obtidos, concluímos que o raio da órbita do satélite é $R \cong 42.300$ km. Sendo $R_{Terra} = 6.380$ km, a altitude do satélite é $h = R - R_{Terra} = 42.312 - 6.380 \approx 36.000$ km.

Agora é sua vez...

Acesse o Ambiente Virtual de Aprendizagem e realize a(s) atividade(s) proposta(s).