MOVIMENTO DOS PROJÉTEIS 10

Gil da Costa Marques

10.1 Introdução

William de Occam foi um dos escolásticos mais influentes do século XIV. Formulou um princípio – o princípio básico do seu pensamento –, conhecido como a "navalha de Occam", ou seja, deve-se cortar tudo o que for desnecessário na descrição dos fenômenos físicos. Numa tradução mais livre, poderíamos dizer que "esse princípio é equivalente ao princípio da simplicidade", isto é, "a explicação mais simples é, usualmente, a correta". Por esse princípio, deve-se fazer uso parcimonioso de conceitos (ou entidades) na descrição dos fenômenos naturais. Assim, movimento para William de Occam seria apenas a mudança da posição de um corpo com o tempo. Mediante essa definição, seria fútil o uso de conceitos introduzidos por Aristóteles, tais como lugar comum, mais pesado, mais leve etc. De acordo com ele, "é fútil postular outras tais coisas". Foi assim o primeiro escolástico a se contrapor às ideias de Aristóteles no que tange aos movimentos.

O princípio da simplicidade foi evocado por Galileu ao estudar o movimento dos projéteis. De acordo com ele: "Quando observamos uma pedra que cai de uma posição elevada, partindo do repouso, adquirindo continuamente incrementos na velocidade, por que não crer que tais incrementos ocorrem de uma maneira extremamente simples e óbvia para todos?"

E argumenta que tal movimento é uniformemente acelerado, pois ele é o movimento acelerado mais simples de todos:

> "Se examinarmos atentamente, descobriremos que não existe regra mais simples para os incrementos de velocidade do que aquela que se repete continuamente da mesma maneira... Assim, se o corpo continuar seu movimento com a velocidade adquirida num certo intervalo de tempo, essa velocidade é a metade daquela que o corpo adquire durante um intervalo de tempo duas vezes maior do que esse primeiro intervalo."

Dessa forma, o grande gênio trocou argumentos conhecidos hoje como dinâmicos por argumentos que envolvem incrementos de velocidade mais simples entre todos os incrementos possíveis. Argumenta, portanto, que as leis da queda livre obedecem ao princípio da simplicidade. Propõe, assim, que na queda livre *"o incremento de velocidade seja proporcional ao incremento de tempo"*.

Galileu deu um grande passo no entendimento da queda dos objetos e, de maneira geral, do movimento dos objetos próximos da superfície terrestre. Desde que os objetos se desloquem a distâncias pequenas acima da superfície terrestre, sua descrição ainda se aplica nos dias de hoje. A esses movimentos damos o nome de movimento dos projéteis. Nas circunstâncias apontadas, a força gravitacional exercida pela Terra sobre eles é aproximadamente constante.

A constância da força gravitacional, no entanto, só se aplica desde que a altura alcançada pelo objeto satisfaça a condição:

$$h << R_{\text{Terra}},$$

ou seja, desde que a altura máxima alcançada pelos projéteis (h) seja muito menor do que o raio da Terra R_{Terra}. Nessas circunstâncias, a força gravitacional não varia muito e, dentro de uma boa aproximação, podemos considerar que a força gravitacional seja constante.

10.2 Galileu e o Movimento dos Projéteis

Na sua obra hoje famosa, *Discurso sobre duas Novas Ciências*, Galileu estudou o movimento dos projéteis. Entendeu os pontos mais relevantes desse tipo muito particular de movimento. Entre os pontos altos do seu estudo, é importante ressaltar quatro aspectos percebidos por ele:

1. O movimento ocorre num plano vertical.
2. O movimento pode ser decomposto em um movimento uniforme, ao longo de um plano horizontal, e um movimento uniformemente variado ao longo de um eixo na vertical.
3. A trajetória é um segmento de parábola. Essa curva é descrita como uma das cônicas. Esse fato, como apontado por Simplício nos diálogos, não era conhecido até então. De acordo com o enunciado do seu primeiro teorema:

> "Um projétil dotado de um movimento uniforme horizontal, composto por um movimento acelerado naturalmente (movimento uniformemente acelerado) na direção vertical, descreve uma curva que é uma semiparábola."

4. Os itens 2 e 3 acima são válidos desde que não levemos em conta a resistência do ar. Trata-se, portanto, de uma aproximação.

Sua percepção sobre os efeitos da resistência do ar é bastante interessante, uma vez que, de acordo com Galileu:

> "...oferecendo maior resistência a um corpo que se move mais rápido do que o mesmo corpo em um movimento mais lento."

Ou seja, a resistência do ar depende da velocidade do objeto que se move. Percebeu ainda que a resistência oferecida pelo ar depende da geometria do objeto.

> Galileu contestava as ideias de Aristóteles, oferecendo uma explicação para o movimento dos projéteis baseada na ideia de um agente externo que impulsionaria os projéteis em direção ao centro da Terra e de que, qualquer que fosse esse mecanismo, ele seria simples. Essa simplicidade se refletiria no comportamento da aceleração que, nesse caso, é constante.

10.3 As condições iniciais

Ao tratarmos do movimento dos projéteis, consideraremos como plana a superfície da Terra. Para os fenômenos corriqueiros aqui estudados, essa aproximação é muito boa.

Consideraremos um sistema cartesiano de tal forma que o eixo x seja paralelo ao solo e o eixo y seja ortogonal a ele (vide **Figura 10.1**).

A situação física que vamos estudar neste momento é a seguinte: um projétil é lançado de um ponto num certo instante de tempo (uma bala de canhão, por exemplo).

Seja o instante de tempo dado por $t = t_0$ e sejam (x_0, y_0) as coordenadas cartesianas do ponto de lançamento do projétil.

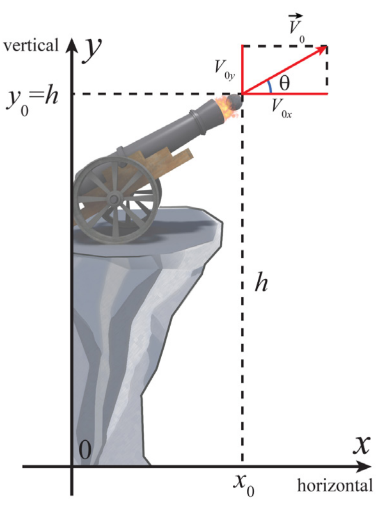

Figura 10.1: Lançamento de projétil de uma altura h com velocidade inicial v_0 e com ângulo de tiro θ.

Admitamos que ele seja lançado com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$ tal que o vetor velocidade inicial seja escrito como:

$$\vec{v}_0 \equiv \vec{v}(t_0) = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j} \tag{10.1}$$

Suponhamos ainda que ele seja lançado a partir de uma altura h. Essa é a altura do lançamento. Assim, o ponto de lançamento do projétil tem coordenadas cartesianas dadas por:

$$(x_0, y_0) = (x_0, h) \tag{10.2}$$

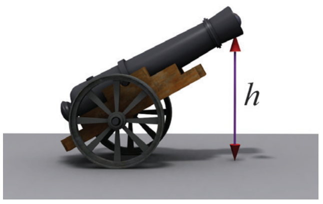

Figura 10.2: Altura do objeto lançado.

Os quatro dados acima, x_0, h, v_{0x}, v_{0y}, especificam as **condições iniciais** do movimento. Por meio delas sabemos tudo sobre o início do movimento.

10.3.1 Ângulo de tiro e as componentes da velocidade

Muitas vezes, especificamos as condições iniciais do movimento a partir do módulo da velocidade inicial v_0 e do ângulo θ_0 definido como o ângulo formado pelo vetor velocidade com a horizontal (eixo x). Esse ângulo é conhecido como ângulo de tiro.

Assim, outra forma de especificar as condições iniciais é utilizar as grandezas (v_0, θ_0). As componentes do vetor velocidade inicial definidas em **10.1** são relacionadas a estas últimas por meio das relações:

$$\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cos\theta_0 \\ v_{0y} &= v_0 \operatorname{sen}\theta_0 \end{aligned} \tag{10.3}$$

Veremos, a seguir, que é possível, a partir das condições iniciais, prever a posição do projétil a qualquer tempo, bem como sua velocidade.

10.4 O problema geral

O problema mais geral do movimento dos projéteis é de determinar a posição e a velocidade da partícula em cada instante de tempo, tomando como base a hipótese de que a força da gravidade é constante. É um problema que pode ser inteiramente resolvido se fornecermos os ingredientes fundamentais, a saber, as condições iniciais: as duas coordenadas cartesianas da posição inicial e as duas componentes da velocidade inicial.

Em particular, estamos interessados na determinação dos seguintes parâmetros:

a. A altura máxima atingida;

b. O tempo de queda (tempo de duração do voo livre);

c. O alcance do projétil na posição horizontal.

10.4.1 Alcance e tempo de voo

No mais das vezes, após o lançamento, ocorrem dois acontecimentos importantes. O primeiro deles (que ocorre sempre) é a queda do objeto. Seja $t_{queda} = t_q$ o instante no qual ocorre o impacto do projétil contra o solo. O tempo de voo (t_{voo}) é definido como o tempo no qual ele esteve viajando. Ele é dado pela diferença entre os instantes de tempo de queda e do lançamento:

$$t_{voo} = t_q - t_0 \tag{10.4}$$

Durante o tempo de percurso – ou tempo de voo –, o projétil percorre uma distância horizontal conhecida como **alcance**.

10.4.2 Altura máxima

O segundo acontecimento importante, e que vale a pena destacar, é o fato de que depois de decorrido um certo instante de tempo após o lançamento, o projétil atinge uma altura máxima ($y_{max} = h_{max}$), a partir da qual tem início o seu movimento de queda.

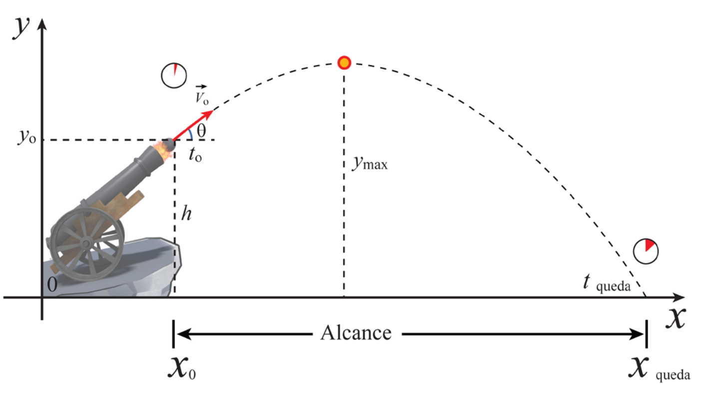

Figura 10.3: Altura máxima e o alcance da bala de canhão.

Admite-se que a aceleração da gravidade (g) seja constante. Como apontado antes, isso vale para alturas máximas atingidas não muito grandes.

Independentemente de quais sejam os objetivos, precisamos, primeiramente, determinar as equações básicas do movimento.

10.5 Equações Básicas do Movimento

A aplicação realista mais simples que podemos fazer das leis de Newton diz respeito ao movimento de partículas sob ação da gravidade, quando esta é admitida constante. Assim, a análise desse movimento fica consideravelmente simplificada se a força da gravidade não mudar muito quando consideramos os movimentos próximos à superfície terrestre (alguns quilômetros acima da superfície). São movimentos que ocorrem no cotidiano, como a queda de um objeto.

Adotamos, para o estudo, um sistema cartesiano em que o eixo das abscissas (o eixo x) é paralelo à superfície terrestre e o eixo y está na direção perpendicular à superfície.

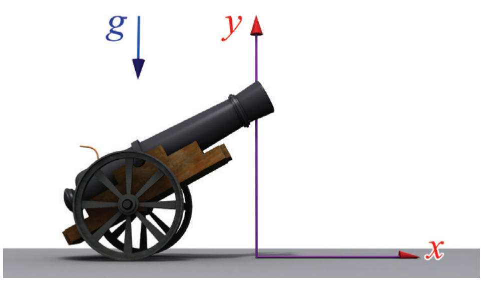

Figura 10.4: Sistema de referência e as coordenadas cartesianas.

Consideramos como plana a Terra e, como a gravidade aponta sempre para o seu interior, desprezando a força de resistência do ar, e tendo em vista a escolha do referencial acima, a expressão para a força gravitacional é:

$$\vec{F} = -(mg)\vec{j} \tag{10.5}$$

Desse modo, as componentes horizontal (eixo $0x$) e vertical (eixo $0y$) dessa força são:

$$F_x = 0$$
$$F_y = -mg$$

Assim, podemos estudar o movimento do projétil como a composição de dois movimentos: um na direção vertical (eixo $0y$) e outro na direção horizontal (eixo $0x$).

Substituindo as expressões acima nas duas equações fundamentais do movimento (2ª Lei de Newton), obtemos duas equações:

$$\begin{aligned} F_x &= ma_x = 0 \\ F_y &= ma_y = -mg \end{aligned} \qquad 10.6$$

A primeira leva-nos a concluir que a velocidade ao longo do eixo $0x$ (a componente x da velocidade) permanece constante ao longo do movimento:

$$m\frac{dv_x}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dv_x}{dt} = 0 \qquad 10.7$$

o que implica:

$$v_x = v_x\left(t_0\right) = \text{constante} \qquad 10.8$$

A segunda equação leva-nos a concluir que a aceleração do projétil é igual à aceleração da gravidade:

$$a_y = -g$$

Como $a_y = (dv_y)/(dt)$ pode-se escrever:

$$\frac{dv_y}{dt} = -g \qquad 10.9$$

Integrando ambos os termos com respeito ao tempo, temos a igualdade:

$$\int_{t_0}^{t} dv_y\left(t'\right) = -g\int_{t_0}^{t} dt' \qquad 10.10$$

O resultado dessas integrais é trivial. Obtemos:

$$v_y\left(t\right) - v_y\left(t_0\right) = -g\left(t - t_0\right) \qquad 10.11$$

ou de modo equivalente:

$$v_y\left(t\right) = v_y\left(t_0\right) - g\left(t - t_0\right) \qquad 10.12$$

Utilizando a notação $v_y(t_0) = v_{0y}$, a equação acima se escreve:

$$v_y = v_{0y} - g(t - t_0) \tag{10.13}$$

A equação **10.7** pode ser reescrita como

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_x(t_0) \tag{10.14}$$

Procedimentos análogos ao adotado anteriormente levam-nos à solução:

$$x(t) = x(t_0) + v_x(t_0)(t - t_0) \tag{10.15}$$

ou, alternativamente,

$$x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \tag{10.16}$$

Portanto, como previsto por Galileu, na direção do eixo $0x$, o movimento é uniforme.

Finalmente, consideramos a equação para a coordenada y. De acordo com a expressão **10.13**, ela pode ser escrita como:

$$\frac{dy(t)}{dt} = v_y(t_0) - g(t - t_0) \tag{10.17}$$

ou, em termos de diferenciais:

$$dy(t) = \left[v_y(t_0) - g(t - t_0)\right]dt \tag{10.18}$$

Integrando membro a membro, temos:

$$\int_{t_0}^{t} dy(t') = \int_{t_0}^{t} \left[v_y(t_0) - g(t' - t_0)\right]dt' \tag{10.19}$$

Donde obtemos o resultado:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2 \tag{10.20}$$

As soluções das equações de Newton são, portanto:

$a_x = 0$ $v_x = v_x(t_0) = v_{0x}$ $x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0)$	$a_y = -g$ $v_y = v_{0y} - g(t - t_0)$ $y(t) = y_0 + v_{0x}(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2$

Estas equações horárias são as soluções mais gerais do movimento de uma partícula quando sob ação da gravidade, assumindo uma força gravitacional constante. Elas dependem das condições iniciais, ou seja, dependem da velocidade e da posição do projétil (ou de uma partícula) no instante de tempo inicial t_0.

São soluções, portanto, dependentes das componentes da posição e da velocidade no instante do lançamento:

$x_0 \equiv x(t_0)$ $v_{0x} \equiv v_x(t_0)$	$y_0 \equiv y(t_0)$ $v_{0y} \equiv v_y(t_0)$

Assim, os vetores aceleração, velocidade e posição dependem do tempo, de acordo com as expressões:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= -g\vec{j} \\ \vec{v}(t) &= v_{0x}\vec{i} - g(t - t_0)\vec{j} \\ \vec{r}(t) &= \left(x_0 + v_{0x}(t - t_0)\right)\vec{i} + \left(y_0 + v_{0x}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2\right)\vec{j} \end{aligned} \tag{10.21}$$

As coordenadas x_0 e y_0 são as coordenadas iniciais, respectivamente, nos eixos $0x$ e $0y$; enquanto v_{0x} e v_{0y} são as componentes horizontal (eixo $0x$) e vertical (eixo $0y$) da velocidade no instante do lançamento.

A conclusão a que chegamos é a de que, dadas a posição inicial (x_0 e y_0) e a velocidade inicial (v_{0x} e v_{0y}) do projétil, e conhecendo de antemão o valor da aceleração da gravidade g, podemos determinar a sua posição e velocidade em qualquer instante t depois do lançamento.

Exemplos

- **Exemplo 1:**

A figura ilustra a situação no instante em que um projétil de massa $m = 20$ kg sai da "boca" de um canhão. As condições iniciais são especificadas na **Figura 10.5**. O referencial cartesiano é também apresentado nessa figura. Adotaremos, ademais, o instante inicial igual a zero ($t_0 = 0$)

a. Escrever as componentes das acelerações a_x e a_y do projétil.

b. Quais as condições iniciais do movimento deste projétil?

c. Escrever as equações horárias das componentes do vetor velocidade e do vetor posição.

d. Qual a posição, ou as coordenadas (x, y), e a velocidade do projétil (ou suas componentes) no instante $t = 24$ s?

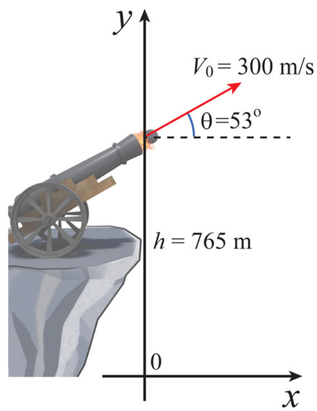

Figura 10.5: Exemplo de condições iniciais.

→ Resolução

a. Considerando desprezível a resistência do ar e $g = 10$ m/s², as componentes da aceleração do projétil são: $a_x = 0$ e $a_y = -g = -10$ m/s².

b. Conforme as equações **10.1**, **10.2** e **10.3**, considerando-se o referencial adotado e os dados fornecidos, as condições iniciais são:

- $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0) = \left[300.\cos(53°)\right]\vec{i} + \left[300.\text{sen}(53°)\right]\vec{j} = 180.\vec{i} + 240.\vec{j} \quad (\text{m/s})$
- $\vec{r}(t_0) = 0\vec{i} + h\vec{j} = 765\vec{j}$

c. Adotando-se o sistema de unidades internacionais, as equações horárias do movimento do projétil para as condições iniciais dadas acima são:

$a_x = 0$	$a_y = -g = -10$ m/s²
$v_x = 180$ m/s	$v_y = 240 - 10.t$
$x(t) = 180.t$	$y(t) = 765 + 240.t - 5t^2$

d. Utilizando as equações horárias do movimento já estabelecidas no item anterior, obtemos para o valor das coordenadas:

$$x(t = 24\ \text{s}) = 180 \times 24 = 4.320\ \text{m}$$
$$y(t = 24\ \text{s}) = 765 + (240 \times 24) - 5(24)^2 = 3.645\ \text{m}$$

e para as componentes da velocidade:

$$v_x(t = 24\ \text{s}) = 180\ \text{m/s}$$
$$v_y(t = 24\ \text{s}) = 240 - (10 \times 24) = 0$$

Observe que, sendo $v_y(t = 24\ \text{s}) = 0$, a velocidade do projétil nesse instante é:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = 180\vec{i}$$

10.5.1 Trajetória do Projétil

Determinemos agora a trajetória do projétil. Para isso, escrevemos o tempo como dependente da coordenada x (na verdade, como sabemos, é o inverso). Obtemos:

$$(t - t_0) = \frac{x - x_0}{v_{0x}} \qquad 10.22$$

Substituindo a expressão **10.22** em $y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0) - (g/2)(t - t_0)^2$, encontramos a equação para a trajetória:

$$y(x) = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0) - \frac{g}{2(v_{0x})^2}(x - x_0)^2 \qquad 10.23$$

A equação acima descreve uma parábola.

- Exemplo 2:

Considere o movimento do projétil do Exemplo 01. Escreva a equação da trajetória e esboce o respectivo gráfico.

→ Resolução

Conforme sintetizado nas equações **10.22** e **10.23**, uma forma de se obter a equação da trajetória é eliminar a variável "t" nas equações das abscissas $x(t)$ e substituí-la nas ordenadas $y(t)$ do movimento. Assim, do item (c) do Exemplo 01, temos:

$$x(t) = 180.t$$
$$y(t) = 765 + 240.t - 5t^2$$

Da primeira equação temos $t = (x/180)$ que, substituído na segunda, resulta:

$$y(x) = 765 + \left(\frac{4}{3}\right)x - \left(\frac{1}{6.480}\right)x^2 \tag{10.24}$$

Para esboçar o gráfico, é interessante saber em quais pontos a trajetória do projétil cruza os eixos das abscissas. Isso corresponde a determinar as raízes do polinômio do segundo grau. Fazendo $y(x) = 0$ na equação acima, obtemos:

$$-\left(\frac{1}{6.480}\right)x^2 + \left(\frac{4}{3}\right)x + 765 = 0$$

Levando-se em conta que:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4/3)^2 - 4\left(-\frac{1}{6.480}\right)(765) = 2,25$$

E, lembrando a expressão das raízes de um polinômio do segundo grau, obtemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\left(\frac{4}{3}\right) \pm \sqrt{2,25}}{2\left(-\frac{1}{6.480}\right)} = \frac{-\left(\frac{4}{3}\right) \pm 1,5}{-\frac{1}{3.240}} = 4.320 \mp 4.860$$

Portanto, temos duas soluções: $x' = 4.320 - 4.860 = -540$ m e $x'' = 9.180$ m.

Ademais, o coeficiente de x^2 é negativo, o que implica que a concavidade da parábola é voltada para baixo; o conhecimento das raízes e da concavidade da parábola facilita o esboço da trajetória no plano *xy*. O resultado é apresentado na **Figura 10.6**.

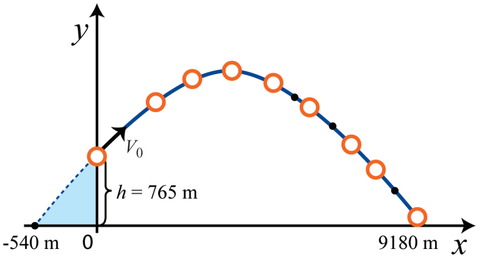

Figura 10.6: Trajetória do projétil no plano vertical.

Matematicamente, a parábola tem, nesse caso, duas raízes. No entanto, em determinados problemas, devemos descartar uma delas. Nesse caso específico, a raiz $x = -540$ m não tem significado físico, pois a bola é lançada do ponto (0; 765 m). Assim, a trajetória real só leva em conta os pontos do espaço tais que suas coordenadas são positivas, isto é: $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

10.5.2 Altura Máxima

A altura máxima do projétil é atingida quando a componente da velocidade, ao longo do eixo 0*y*, for igual a zero (ou seja, quando ele cessar o movimento ascendente). Isto ocorre, de acordo com **10.13**, quando o tempo decorrido definido como $t_{\text{h (max)}} = t_{\text{m}}$ satisfizer a condição:

$$0 = v_{0y} - g(t_m) \;\to\; (t_m) = \frac{v_{0y}}{g} \tag{10.25}$$

A altura máxima $y_{\text{max}} = h_{\text{max}}$ é dada, portanto, mediante a substituição de $t = t_{\text{m}}$ na equação da coordenada $y(t)$ (equação **10.20** do texto). Obtemos, nesse caso:

$$h_{\text{max}} = y_0 + v_{0y}\left[\frac{v_{0y}}{g}\right] - \frac{g}{2}\left[\frac{v_{0y}}{g}\right]^2 \;\to\; h_{\text{max}} = y_0 + \frac{(v_{0y})^2}{2g} \tag{10.26}$$

Observe que a diferença de alturas (a diferença entre a altura máxima e a do lançamento) é dada por:

$$\Delta h \equiv h_{\text{max}} - y_0 = \frac{(v_{0y})^2}{2g} \tag{10.27}$$

- Exemplo 3:

Considere o movimento do projétil do Exemplo 01. Determine as coordenadas do ponto de altura máxima alcançada pelo projétil.

→ Resolução

A altura máxima pode ser determinada a partir da equação **10.26**. E isso requer o conhecimento dos valores de y_0 e v_{0y} (uma vez que g é uma grandeza conhecida).

De acordo com os dados, $v_0 = 300$ m/s e $\theta = 53°$; logo, a componente vertical da velocidade inicial é $v_{0y} = v_0.\text{sen}(\theta) = 300 \times 0{,}8 = 240$ m/s.

A ordenada, no ato de lançamento e conforme o enunciado, é $y_0 = 765$ m. Logo, de acordo com **10.26**, a altura máxima é dada por:

$$h_{\text{max}} = y_0 + \frac{(v_{0y})^2}{2g} = 765\text{ m} + \frac{(240\text{ m/s})^2}{2 \times 10\text{ m/s}^2} = 765\text{ m} + 2.880\text{ m} = 3.645\text{ m}$$

Podemos determinar ambas as coordenadas associadas à altura máxima. Devemos começar pela determinação do tempo para o qual a componente vertical da velocidade do projétil é nula, ou seja, $v_y = v_{0y} - g.t_m = 0$. Desta condição, determinamos t_m:

$$0 = 240 - 10(t_m) \to t_m = 24\text{ s}$$

Substituindo esse valor em $y(t) = 765 + 240.t - 5t^2$, determinamos $y_{\text{max}} = h_{\text{max}}$.

$$h_{\text{max}} = 765 + 240(24) - 5(24)^2 = 3.645\text{ m.}$$

Este valor corresponde à coordenada y do ponto de altura máxima. Para o valor da coordenada x devemos substituir o valor $t_m = 24$ s em $x(t) = 180.t$; determinamos com isso a abscissa do ponto de altura máxima, ou seja, $x_m = 180(24) = 4.320$ m.

Portanto, o ponto cujas coordenadas são (4.320 m, 3.645 m) é o ponto de altura máxima do projétil.

O gráfico (**Figura 10.7**) ilustra o ponto de altura máxima. Atente para a sua característica de velocidade vertical nula: $v_y = 0$.

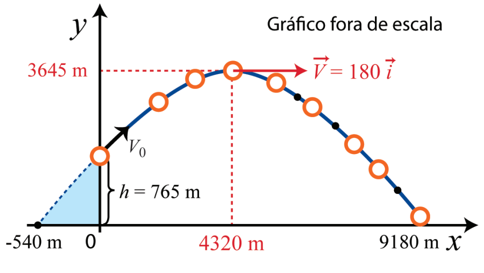

Figura 10.7: Valores de alguns parâmetros relevantes no movimento.

10.5.3 Tempo de Queda

O ponto onde o projétil atinge o solo tem ordenada $y = 0$ (admitindo-se que o eixo x seja paralelo e junto ao solo). O projétil atinge o solo ($y = 0$) no instante t_q tal que

$$y(t) = y_0 + v_{0y}(t_q) - \frac{g}{2}(t_q)^2 = 0 \qquad 10.28$$

Essa equação permite-nos inferir que, tendo em vista que estamos assumindo implicitamente que $v_{0y} \geq 0$ e que esse instante deve ocorrer depois do lançamento ($t > 0$), existe apenas uma solução possível, a qual é dada por:

$$t_q = \frac{v_{0y} + \sqrt{(v_{0y})^2 + 2gy_0}}{g} \qquad 10.29$$

No caso em que fazemos o instante inicial igual a zero, o tempo de voo coincide com o tempo no qual ocorreu a queda.

10.5.4 Alcance do Projétil

O alcance é obtido a partir da posição do projétil (no eixo x) quando ele cai (x_q). Basta substituir o tempo t pelo tempo de queda t_q na equação **10.16**. Obtém-se, considerando $t_0 = 0$:

$$x_q = x_0 + v_{0x}t_q \qquad 10.30$$

Ao atingir o solo, o projétil tem velocidade tal que suas componentes são dadas por:

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\theta \\ v_y(t_{voo}) &= v_0 \operatorname{sen}\theta - gt_{voo} = -\sqrt{(v_0 \operatorname{sen}\theta)^2 + 2gy_0} \end{aligned} \qquad 10.31$$

onde v_0 = velocidade de lançamento; θ = ângulo de tiro; y_0 = ordenada do ponto de lançamento; t_{voo} = tempo de voo, que coincide com a expressão **10.29**. Lembre-se de que $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta$.

- Exemplo 4:

Considere o movimento do projétil do Exemplo 01. Determinar:

a. o tempo de voo (que, nesse caso, é o tempo de queda) do projétil;

b. o alcance do projétil;

c. o módulo da velocidade quando do impacto contra o solo.

→ Resolução

A **Figura 10.8** ilustra a trajetória parabólica e o ponto de impacto do projétil contra o solo.

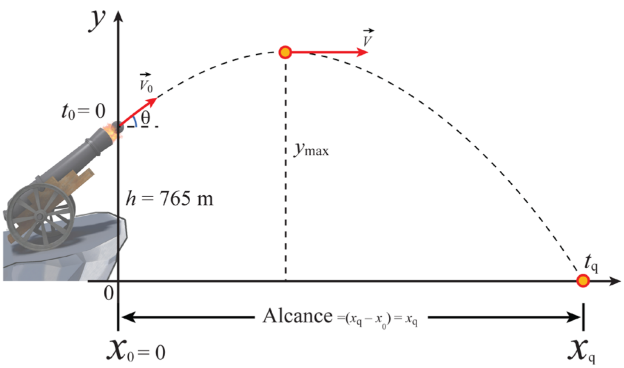

Figura 10.8: Tempo de voo e alcance.

As equações básicas deste problema foram determinadas no Exemplo 01. O quadro abaixo apresenta um resumo das equações horárias para esse caso:

$a_x = 0$ $v_x = 180\ \text{m/s}$ $x(t) = 180.t \quad (\text{m})$	$a_y = -g = -10\ \text{m/s}^2$ $v_y = 240 - 10.t \quad (\text{m/s})$ $y(t) = 765 + 240.t - 5t^2 \quad (\text{m})$

a. Determinação do tempo de voo ou de queda.

O tempo de voo ou tempo de queda é o instante $t_q = t_{voo}$, no qual o projétil atinge o solo, ou seja, quando $y(t_q) = 0$. Portanto:

$$0 = 765 + 240(t_q) - 5(t_q)^2$$

O tempo de queda assim determinado é uma das raízes da equação do segundo grau acima. Assim, sendo:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (240)^2 - 4(-5)(765) = 72.900$$

o tempo de queda é dado por:

$$t_q = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-240 \mp 270}{-10}$$

Donde, aparentemente, temos duas possíveis soluções: $t'_q = -3$ s e $t''_q = 51$ s. No entanto, adotando-se, como foi feito, o instante de tempo inicial igual a zero, a única solução possível é a de sinal positivo. Assim, devemos escolher $t''_q = 51$ s. A raiz negativa não faz sentido, uma vez que estamos descrevendo o movimento para tempos posteriores ao lançamento. Devemos, pois, considerar o tempo sempre positivo. Portanto, adotando o instante inicial nulo, temos:

$$t_q = t_{voo} = 51 \text{ s.}$$

b. Determinação do alcance

O alcance é a distância que o projétil percorre, ao longo da horizontal, desde o instante de lançamento até o instante de queda:

$$\text{Alcance} = x_q - x_0$$

Como, neste exemplo, $x_0 = 0$, o alcance corresponde à abscissa do ponto de impacto do projétil contra o solo. Assim,

$$a = x_q = 180(51) = 9.180 \text{ m}$$

c. Determinação do módulo da velocidade de impacto

As componentes da velocidade do projétil, em qualquer ponto de sua trajetória, em função do tempo, são:

$$v_x = 180 \text{ m/s}$$
$$v_y = 240 - 10.\text{t (m/s)}$$

Logo, para $t = 51$ s (instante em que o projétil impacta o solo), as componentes têm os valores:

$$v_x = 180 \text{ m/s}$$
$$v_y = 240 - 10.(51) = -270 \text{ m/s}$$

O sinal negativo de v_y é um indicativo de que o sentido do movimento é vertical para baixo. O módulo da velocidade é:

$$v = \sqrt{(180)^2 + (-270)^2} \cong 324 \text{ m/s.}$$

10.6 Casos Particulares

As expressões obtidas até aqui para as grandezas relevantes (tempo de voo, alcance, altura máxima) são muito gerais. Com o intuito de analisar casos mais simples vamos observar três situações distintas: Lançamento na vertical, Lançamento horizontal e Lançamento a partir do solo.

10.6.1 Lançamento na vertical

No lançamento na vertical, a componente da velocidade na direção horizontal é nula. Em outras palavras, o ângulo de lançamento é $\theta = 90°$. Assim, as equações horárias são:

$a_x = 0$	$a_y = -g$
$v_x = v_{0x} = v_0 \cos 90° = 0$	$v_y = v_{0y} - g(t - t_0)$
$x(t) = x_0$	$y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0) - (g/2)(t - t_0)^2$

Nessas circunstâncias, o movimento se dá apenas ao longo do eixo y, e suas equações básicas são as dadas no quadro acima. Temos três situações possíveis:

10.6.2 Lançamento para cima

Neste caso, o projétil lançado com velocidade $v_0 = v_{0y}$ atingirá a altura máxima dada agora por $y_{max} = h + v_0^2/2g$. Assim, considerando-se $t_0 = 0$, o tempo da altura máxima é (veja equação **10.25**) dado por:

$$t_m = \frac{v_0}{g} \tag{10.32}$$

e atingirá o solo no instante

$$t_q = t_{voo} = t_m\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}\right] \tag{10.33}$$

- Exemplo 5:

Um jogador lança uma bola diretamente para cima (veja **Figura 10.9**), a partir de uma altura h = 1,55 m, com velocidade inicial de 15 m/s. Considerando-se o instante inicial $t_0 = 0$, e adotando-se o referencial de acordo com a **Figura 10.9**, determinar:

a. as equações horárias e gerais do movimento;
b. o instante em que a bola atinge a altura máxima;
c. h_{max};
d. o tempo de voo da bola.

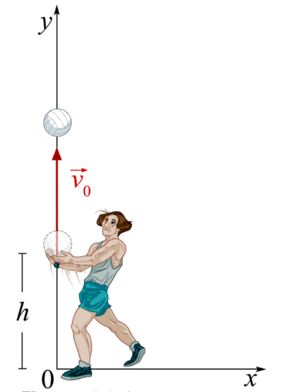

Figura 10.9: Lançamento vertical para cima.

→ Resolução

a. Trata-se de um lançamento vertical para cima, ou seja, o ângulo de tiro é θ = 90°. A sua característica é $v_{0x} = 0$. O movimento da bola, em relação ao referencial adotado, é unidimensional, vertical e para cima. Note que, neste caso, $h = y_0$. As equações horárias, nessas circunstâncias, são:

$a_x = 0$	$a_y = -g = -10$ m/s²
$v_x = v_{0x} = v_0 \cos 90° = 0$	$v_y = 15 - 10t$
$x(t) = x_0 = 0$	$y(t) = 1{,}55 + 15t - 5\,t^2$

b. No instante (t_m) em que a bola atinge a altura máxima, sua velocidade é nula. Impondo $v_y = 0$, determinamos o valor desse instante t_m. Assim,

$$0 = 15 - 10t_m \rightarrow t_m = 1{,}5 \text{ s}$$

c. Tendo em vista que a bola atinge a altura máxima no instante $t = t_m$ = 1,5 s, basta substituir este valor na equação da coordenada y, e obtemos:

$$h_{max} = 1{,}55 + 15(1{,}5) - 5(1{,}5)^2 = 12{,}8 \text{ m}$$

d. O tempo de voo é o intervalo de tempo em que a bola fica no ar desde o seu lançamento até atingir o solo. Logo, impondo a condição $y(t_{voo}) = 0$, e resolvendo a equação resultante, determinamos $t = t_{voo}$. Assim,

$$0 = 1{,}55 + 15t_{voo} - 5(t_{voo})^2$$

cuja solução pode levar a dois resultados: t'_{voo} = 3,1 s e t''_{voo} = −0,1 s. Fisicamente, a resposta certa é t'_{voo} = 3,1 s. A solução t''_{voo} = – 0,1 s deve ser descartada, pois, a partir do lançamento, o tempo é sempre positivo. Portanto, a bola colide com o solo 3,1 s após o seu lançamento.

10.6.3 Lançamento para baixo

Um objeto é lançado verticalmente para baixo com velocidade v_0 de uma altura h. Ele segue na descendente em movimento retilíneo uniformemente acelerado até atingir o solo no instante $t = t_{voo} = t_q$, dado por

$$t_q = t_{voo} = \frac{v_0}{g}\left(\sqrt{1+\frac{2gh}{(v_0)^2}}-1\right) \quad 10.34$$

e com velocidade

$$v_y = -v_0\left(\sqrt{1+\frac{2gh}{(v_0)^2}}\right) \quad 10.35$$

• Exemplo 6:

Um macaco lança um coco do alto de uma palmeira com velocidade v_0 = 5 m/s, verticalmente para baixo, de uma altura h = 25,2 m. Considerando o sistema de referência adotado na figura, determinar:

a. o tempo de queda do fruto;

b. a velocidade com que o fruto atinge o solo.

Figura 10.10 : Lançamento vertical para baixo

→ Resolução

As condições iniciais do movimento (admitindo-se t_0 = 0) são:

$$y_0 = h = 25{,}2 \text{ m e } x_0 = 0$$
$$v_{0y} = -5 \text{ m/s; e } v_{0x} = 0$$

Nessas circunstâncias, as equações do movimento são:

$a_x = 0$	$a_y = -g = -10$ m/s²
$v_x = v_{0x} = v_0\cos 90° = 0$	$v_y = -5 - 10t$
$x(t) = x_0 = 0$	$y(t) = 25{,}2 - 5t - 5t^2$

a. O tempo de queda é determinado impondo a condição $y(t_q) = 0$. Isso nos leva a determinar as raízes do polinômio resultante. Tal polinômio do segundo grau é

$$25{,}2 - 5(t_q) - 5(t_q)^2 = 0$$

uma vez que

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(-5)(25{,}2) = 25 + 504 = 529$$

Suas raízes são:

$$t_q = \frac{-(-5) \pm \sqrt{529}}{2(-5)} = \frac{5 \pm 23}{-10}\text{; donde, } t'_q = \frac{28}{-10} = -2{,}8 \text{ s e } t''_q = \frac{-18}{-10} = 1{,}8 \text{ s.}$$

Como o tempo de queda é contado a partir do lançamento, sendo, portanto, sempre positivo, a solução procurada é $t'' = 1{,}8$ s, o que nos leva a concluir que o fruto atinge o solo 1,8 s após ser lançado.

b. A componente vertical da velocidade pode ser determinada substituindo-se o tempo de queda ($t = 1{,}8$ s) na equação horária da velocidade. Obtemos:

$$v_y = -5 - 10(1{,}8) = -23 \text{ m/s } (\approx -83 \text{ km/h})$$

10.6.4 Queda livre

Na "queda livre", o objeto é abandonado (velocidade inicial $\vec{v}_0 = \vec{0}$) e cai sob a ação do campo gravitacional, ou seja, com aceleração $a_y = -g$ (adotando o eixo $0y$ vertical para cima). Se o objeto for abandonado de uma altura h, na ausência de resistência do ar:

I. O tempo de queda é dado por: $t_q = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

II. O objeto atinge o solo com velocidade: $v_y = -\sqrt{2gh}$

- Exemplo 7:

Consta que Galileo Galilei abandonou duas balas de canhão de massas diferentes, da sacada de um dos últimos andares da Torre de Pisa (Itália), para demonstrar que a velocidade de queda era independente da massa das bolas. Se as bolas foram abandonadas de uma altura h = 45 metros, determinar:

a. o tempo de queda;

b. a velocidade quando do impacto da bola contra o solo.

→ Resolução

Adotando-se os eixos cartesianos, conforme ilustra a **Figura 10.11**, considerando nula a resistência do ar, usando g = 10m/s², e considerando t_0 = 0, as equações fundamentais podem ser assim escritas:

$$a_y = -10 \text{ m/s}^2$$
$$v_y(t) = -10.t \text{ (m/s)}$$
$$y(t) = 45 - 5t^2 \text{ (m)}$$

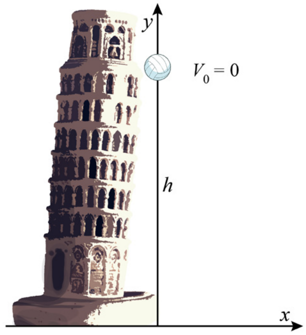

Figura 10.11: Queda livre.

a. O tempo de queda t_q pode ser obtido por meio da equação $y(t_q) = 0$, pois, quando a bola atinge o solo, a coordenada y é nula. Assim, $0 = 45 - 5(t_q)^2 \rightarrow t_q = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ s (sendo $t \geq 0$, descartamos a solução associada ao tempo negativo). Portanto, em queda livre, a bola atinge o solo depois de 3 segundos.

b. Para a previsão da velocidade de impacto contra o solo, usamos a equação da velocidade, na qual substituímos $t = t_q = 3$ s. Assim:

$$v_y = -10(3) = -30 \text{ m/s} \quad (-108 \text{ km/h})$$

O sinal negativo indica que o movimento é no sentido oposto ao da orientação do eixo $0y$.

10.6.5 Lançamento na horizontal

O lançamento na horizontal é caracterizado pelo fato de que ele se processa com um ângulo de tiro igual a zero, ou seja, $\theta = 0°$. Então:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta = v_0 (\cos 0° = 1) \quad \text{e} \quad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta = 0(\operatorname{sen} 0° = 0) \qquad (10.36)$$

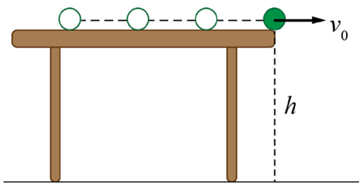

Figura 10.12: Lançamento horizontal. A bola escapa do tampo da mesa com velocidade v_0 horizontal.

O tempo de voo ou tempo de queda é igual ao tempo de queda livre de uma altura h ($t_q = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$) e o alcance será dado por $v_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

- Exemplo 8:

Considere o caso em que a bola da **Figura 10.13** escapa do tampo da mesa de uma altura h = 1,8 m do piso e com velocidade horizontal v_0 = 2 m/s. Determinar:

a. o tempo de queda;

b. as componentes x e y da velocidade no ponto de impacto;

c. o alcance.

→ Resolução

Primeiramente, vamos adotar um sistema de referência cartesiano e identificar as condições iniciais do movimento da bola. Consideraremos nula a resistência do ar e g = 10 m/s².

A **Figura 10.13** ilustra a situação em que, no instante t_0 = 0, a bola escapa da mesa. As condições iniciais são:

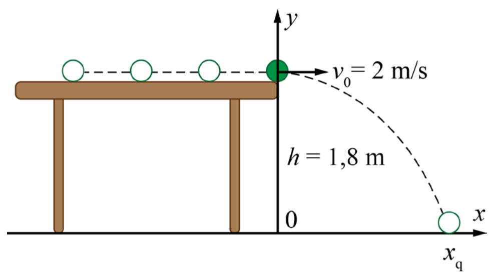

Figura 10.13: Lançamento horizontal com condições iniciais especificadas.

$$v_{0x} = 2 \text{ m/s};$$
$$v_{0y} = 0;$$
$$x_0 = 0$$
$$y_0 = h = 1{,}8 \text{ m}$$

Nesse caso, adotando-se o sistema SI, as equações horárias são:

$v_x = v_{0x} = 2$ m/s;	$v_y = -10t$
$x = 2t$	$y = 1{,}8 - 5t^2$

a. No instante $t = t_q$ a bola atinge o solo. Tal instante é determinado pela condição $y(t_q) = 0$. Igualando a zero a equação da coordenada y e considerando apenas a raiz positiva, obtemos:

$$0 = 1,8 - 5\left(t_q\right)^2 \rightarrow t_q = \sqrt{\frac{1,8}{5}} = \sqrt{0,36} = 0,6 \text{ s}$$

b. Para determinar as componentes x e y da velocidade, devemos substituir $t = t_q = 0,6$ s nas respectivas equações horárias. Obtemos:

$$v_x = 2 \text{ m/s}$$
$$v_y = -10(0,6) = -6 \text{ m/s}$$

O sinal negativo indica que o movimento é no sentido descendente, já que foi adotado o referencial no qual y aponta para cima.

c. O alcance é a distância que a bola percorre na direção horizontal. Conhecendo-se as abscissas do ponto de queda e do ponto inicial, o alcance é dado pela diferença:

$$\Delta x_{\text{alcance}} = x_{\text{queda}} - x_0$$

A abscissa do ponto de queda é obtida substituindo-se $t = t_q = 0,6$ s na equação para a abscissa ($x = 2t$). Assim, $x_q = 2(0,6) = 1,2$ m. Portanto, como $x_0 = 0$, o alcance assume o mesmo valor: 1,2 m.

10.6.6 Lançamento a partir do Solo

Neste caso, basta fazer $h = 0$ nas expressões que representam as equações fundamentais do movimento de projéteis.

$a_x = 0$	$a_y = -g$
$x_0 = 0$	$y_0 = 0$
$v_x = v_0 \cos\theta$	$v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta - g.t$
$x(t) = v_0(\cos\theta)t$	$y(t) = (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - (g/2).t^2$

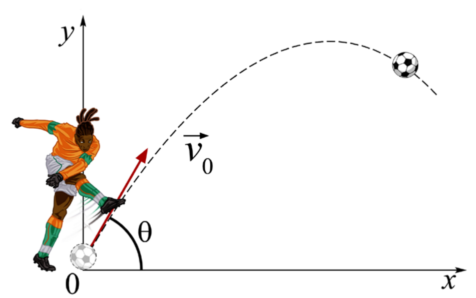

Figura 10.14: Lançamento a partir do solo.

O ponto a ser ressaltado é o de que o tempo de voo será duas vezes maior do que o requerido para atingir a altura máxima, ou seja, o tempo despendido para subir (atingir a altura máxima) é igual ao tempo necessário para descer.

Temos assim:

$$t_{\text{voo}} = 2t_{\text{m}} = \frac{2v_0 \,\text{sen}\,\theta}{g} \quad (10.37)$$

10.6.7 Alcance máximo

Em muitos casos, é importante determinar o valor do ângulo do tiro para obtermos a máxima eficiência em termos de alcance. Uma alternativa para aumentar o alcance é aumentar o valor do módulo da velocidade inicial v_0. Essa solução esbarra no fato de que temos limites, físicos ou do artefato utilizado para efetuar o lançamento, para obtermos incrementos no valor dessa grandeza. A alternativa, para um valor fixo da velocidade inicial v_0, é escolher o melhor ângulo de tiro. Lembrando que, nessas circunstâncias, o alcance depende do ângulo de tiro de acordo com a expressão:

$$x_{\text{q}}(\theta) = \frac{(v_0)^2}{g} 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = \frac{(v_0)^2}{g}\text{sen}\,2\theta \quad (10.38)$$

o valor máximo do alcance ocorrerá quando a derivada for nula:

$$\left.\frac{d\left[x_{\text{q}}(\theta)\right]}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_{\text{q max}}} = \frac{(v_0)^2}{g} 2\cos 2\theta = 0 \quad (10.39)$$

Assim, o alcance máximo será obtido quando o ângulo de tiro for igual a 45 graus.

- Exemplo 9:

Uma bola de futebol, em repouso no gramado a uma grande distância do gol, é chutada de forma que adquira uma velocidade de lançamento v_0 = 25 m/s e ângulo de tiro θ = 37°. Dados: cos37° = 0,80 e sen37° = 0,60. Considerar nula a influência do ar e a aceleração da gravidade g = 10 m/s².

Calcular:

a. o alcance;

b. a altura máxima.

→ Resolução

Primeiramente, vamos adotar um referencial cartesiano com o eixo 0x horizontal acompanhando o gramado e o eixo 0y no ponto onde a bola se encontra em repouso (veja a **Figura 10.14**).

Assim, as condições iniciais ($t_0 = 0$) e as equações fundamentais são:

$x_0 = 0$ $v_{0x} = 25\cos\theta = 25 \times 0{,}8 = 20$ m/s $x(t) = 20.t$ (m)	$y_0 = 0$ $v_{0y} = 25\text{sen}\,\theta = 25 \times 0{,}6 = 15$ m/s $y(t) = 15.t - 5.t^2$ (m)

Conhecidas as equações fundamentais e as equações horárias, podemos responder aos quesitos solicitados.

a. Como $x_0 = 0$, alcance é o valor de x para $t = t_q$. O tempo de queda é obtido fazendo-se $y(t_q) = 0$. Portanto:

$$0 = 15.t_q - 5.\left(t_q\right)^2$$

Donde inferimos que existem duas soluções, a saber: $t'_q = 0$ e $t''_q = 3$ s.

A primeira raiz refere-se à posição da bola no instante $t_0 = 0$; a segunda é o tempo de queda que estamos procurando. Assim, o alcance é:

$$x_q = 20.t_q = 20.(3) = 60 \text{ m}$$

b. No ponto de altura máxima ($y_{max} = h_{max}$), a componente da velocidade na direção 0y é nula. Assim, fazendo $v_y = 0$, determinamos t_m, ou seja,

$$0 = 15 - 10.t_m \rightarrow t_m = 1{,}5 \text{ s}$$

Substituindo esse valor do tempo na equação horária para $y(t)$, obtemos:

$$y_{max} = h_{max} = 15(1{,}5) - 5(1{,}5)^2 = 11{,}25 \text{ m}$$

Agora é sua vez...

Acesse o Ambiente Virtual de Aprendizagem e realize a(s) atividade(s) proposta(s).