11 MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES (MHS)

Gil da Costa Marques

11.1 Introdução

O estudo do movimento harmônico simples reveste-se de uma importância maior do que parece à primeira vista e isso por duas razões. Em primeiro lugar, porque o MHS é um movimento muito comum: por exemplo, colchões, gangorras, pêndulos e molas exibem tais movimentos. A segunda razão é o fato de que o estudo do movimento harmônico simples representa um dos melhores exemplos da aplicação das leis da mecânica. Nesse exemplo, coloca-se, de forma mais clara, o problema central da mecânica, que é o de determinar a posição de uma partícula, uma vez conhecidas as forças que agem sobre ela.

O movimento harmônico simples ocorre, no entanto, sob determinadas circunstâncias. Ele se dá sempre que a força que age sobre o corpo exibir uma característica à qual damos o nome de comportamento elástico. A tais forças, com características especiais, que especificaremos a seguir, denominamos forças elásticas ou forças harmônicas. O movimento harmônico simples é o movimento periódico mais simples entre todos. Ele é também um movimento oscilatório. Vamos começar abordando essas duas questões.

11.2 Movimentos periódicos

Existem movimentos que se repetem a intervalos de tempo regulares e sucessivos. Tais movimentos são ditos periódicos. Dizemos que o movimento de um ponto material se repetiu se, depois de decorrido o intervalo de tempo de um período (T), ele está na mesma posição anterior e com a mesma velocidade. Não basta, portanto, estar na mesma posição. Assim, dizemos que um movimento é periódico se decorrido um intervalo de tempo T conhecido como o período, valem as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\vec{r}\left(t+T\right)&=\vec{r}\left(t\right)\\ \vec{v}\left(t+T\right)&=\vec{v}\left(t\right)\end{aligned} \qquad 11.1$$

O mais comum entre eles é aquele associado à rotação da Terra em torno do seu eixo. Outro movimento periódico é aquele associado ao movimento da Terra em torno do Sol. Ou, ainda, o movimento de um pêndulo.

O intervalo de tempo decorrido entre duas repetições sucessivas do movimento é conhecido como o Período do movimento. Designamos o período pela letra T. O período associado ao movimento de rotação da Terra é de 24 horas. O período do movimento de translação da Terra em torno do Sol é de aproximadamente 365 dias.

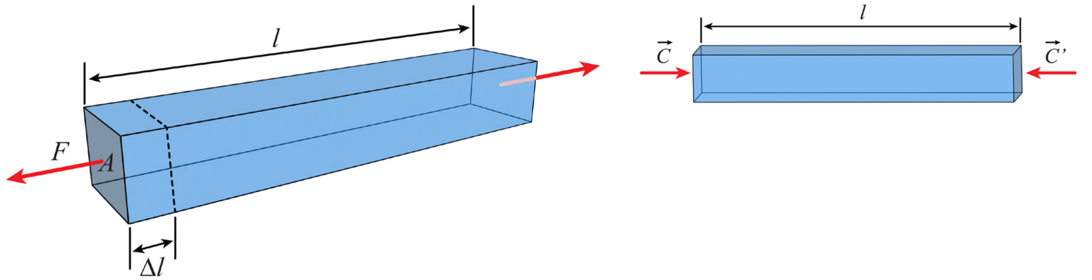

Figura 11.1: Materiais Elásticos, quando deformados ligeiramente mediante a aplicação de trações ou compressões, executam movimentos periódicos.

Definimos a frequência f do movimento periódico como o inverso do período, isto é:

$$f = \frac{1}{T} \tag{11.2}$$

Por essa definição pode-se ver que a frequência determina o número de vezes que o movimento se repete por unidade de tempo.

O movimento da Terra é periódico, uma vez que, depois de um ano, a Terra está na mesma posição no espaço e com a mesma velocidade que ela possuía no ano anterior.

As unidades do período são as mesmas unidades utilizadas como unidade de tempo. Portanto, o período é expresso em unidades como: o segundo, o minuto e a hora, entre outras.

Para as unidades de frequência, temos igualmente várias opções, sendo as mais utilizadas:

Hertz (Hz) – ciclos por segundo
r.p.m. – rotação por minuto
r.p.s. – rotação por segundo

11.3 Movimento Oscilatório

O movimento oscilatório é um caso especial de movimento periódico; isso porque o movimento oscilatório é definido como aquele no qual, em algum momento, o movimento do corpo muda de sentido. Essa inversão se dá quando a velocidade do corpo se anula mudando, em seguida, de sentido. Dizemos que o movimento é oscilatório se ele for periódico e se o sentido do movimento, determinado, no caso unidimensional pelo sinal da velocidade, for invertido a intervalos de tempos regulares (relacionado ao período do movimento). O movimento de um pêndulo simples é o melhor exemplo de tais movimentos. Nos pontos de máxima amplitude, o pêndulo atinge a velocidade igual a zero, retornando em seguida.

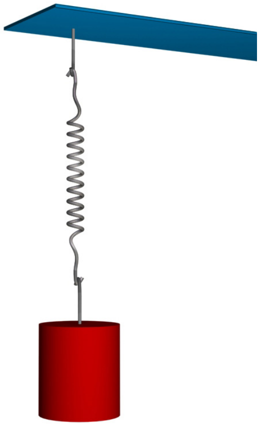

Figura 11.2: Exemplo de Movimento Harmônico Simples.

Neste momento, estudaremos o movimento oscilatório mais simples entre todos. Ele é designado por Movimento Harmônico Simples (MHS).

11.4 A Força Elástica

As forças especiais que dão origem aos movimentos harmônicos simples são aquelas que dependem linearmente da coordenada (que designamos por x), de acordo com a seguinte expressão:

$$F = -kx \quad (11.3)$$

Ao coeficiente de proporcionalidade k denominamos constante elástica. No caso do movimento unidimensional, a coordenada x é a coordenada cartesiana associada à posição da partícula. O ponto $x = 0$ (ou ponto origem) é um ponto dito de equilíbrio, pois quando nele o corpo não está sujeito à ação dessa força. Uma vez colocado o objeto nesse ponto, ele fica ali em repouso.

O fato de ser negativa a constante de proporcionalidade entre a força e a coordenada, faz toda a diferença. Ou seja, a força se opõe tanto a aumentos quanto a reduções dos deslocamentos. Assim, se x designar a coordenada associada ao deslocamento a partir do ponto de equilíbrio, quando este for positivo, a força resulta negativa e, portanto, a força tem o sentido da origem. No entanto, para valores negativos da coordenada x, a força tem sinal positivo e, de novo, apontando para a origem. O fato é que, independentemente de onde o corpo esteja, essa força procura sempre trazer o corpo em direção à origem, que é o ponto de equilíbrio.

Considere o caso de uma borracha. Nesse caso, se a comprimirmos, ela "empurra" a nossa mão. Se a esticarmos, ela "puxa a nossa mão". Tente fazer o mesmo com a mola. Quando ela está em repouso, ela permanece em repouso. Quando a elongamos por um valor x, mediante o deslocamento da extremidade da mola, a força age procurando sempre trazer a mola para a sua posição de equilíbrio. Esse é um comportamento bastante comum de certos materiais. Vale para qualquer substância elástica. Assim, quando procuramos deformar um material elástico (um elástico comum, por exemplo), ocorrerá o seguinte: enquanto a deformação não for muito grande, a força é proporcional ao deslocamento (ou à deformação imposta), mas atua sempre no sentido contrário ao dele. É uma tendência ou reação natural, no sentido de buscar a restauração da forma original.

Os corpos materiais exibem este tipo de movimento só para pequenos valores dos deslocamentos. Se aumentarmos o deslocamento do corpo, a força restauradora não tem um comportamento linear. Tem um comportamento descrito pela **Figura 11.3**. Além de um determinado valor da elongação, ocorre a ruptura do material.

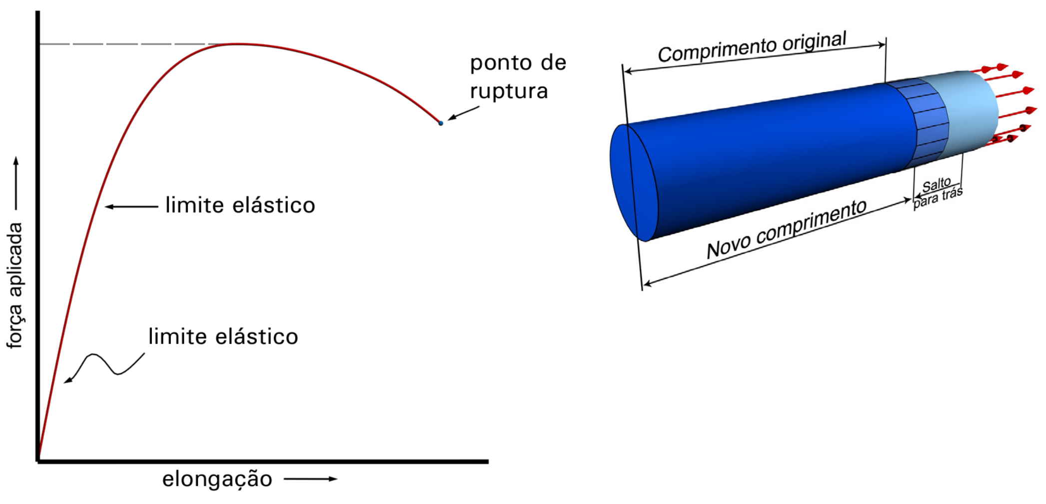

Figura 11.3: O comportamento linear só é válido para pequenas deformações de materiais elásticos.

Exemplos

- Exemplo 1:

Uma mola helicoidal tem constante elástica k. Ela funciona igualmente bem sob tração ou sob compressão. Uma de suas extremidades é fixa numa parede e a outra no ponto A, onde ela é presa a um carrinho de massa m que pode mover-se livremente sobre uma plataforma horizontal.

a. Uma força horizontal $\vec{F}_1 = -80.\vec{i}$ (newtons) mantém o carrinho em repouso, produzindo uma elongação de $x = -4$ cm na mola (ela fica, assim, comprimida). Determine a constante elástica da mola.

b. Quando solto (livre da força $\vec{F}_1$ que o segura), o carrinho é empurrado pela força elástica da mola no sentido positivo do eixo $0x$. Determine a força da mola quando ela é elongada até um ponto no qual $x = 2,5$ m.

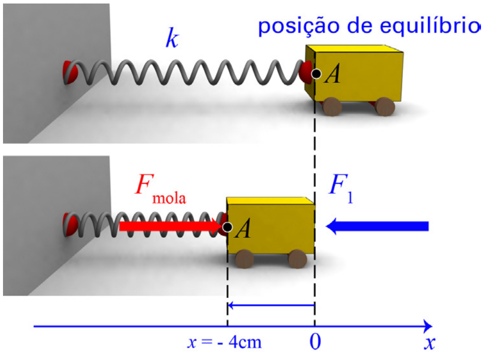

Figura 11.4: O movimento de um corpo preso a uma mola resulta quando a mesma está sujeita a forças de compressão (como no caso da figura) ou quando sujeita a forças de tração.

→ Resolução

a. Sobre o carrinho atuam quatro forças:

- Na vertical, identificada com a direção do eixo y, atuam a força peso e a força normal: $\vec{p} = -mg\vec{j}$ e $\vec{N} = N\vec{j}$. Tais forças não são representadas na **Figura 11.4**.
- Na direção horizontal, atuam outras duas forças: a da mola e a força horizontal já aludida (escrevemos na notação vetorial: $\vec{F}_{\text{mola}} = (F_{\text{mola}}).\vec{i}$ e $\vec{F}_1 = -80.\vec{i}$.

De acordo com a 2ª Lei de Newton, podemos escrever:

$$\vec{p} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{mola}} + \vec{F}_1 = m \cdot \vec{a}.$$

Como a situação é de equilíbrio, então, $\vec{a} = 0$.

Conclui-se, portanto, que:

$$\vec{P} + \vec{N} = \left[(-mg) + N\right] \cdot \vec{j} = 0 \rightarrow N = mg$$

$$\vec{F}_{\text{mola}} + \vec{F}_1 = \left[F_{\text{mola}} - F_1\right] \cdot \vec{i} = 0 \rightarrow F_1 = F_{\text{mola}}$$

Pela equação **11.3**, $F_{\text{mola}} = -kx$, permite escrever: $F_1 = -kx$, donde se conclui que: $k = -F_1/x$. Substituindo os valores conhecidos, $F_1 = 80$ N e $x = -4$ cm $= -0,04$ m, resulta que a constante elástica da mola é dada por:

$$k = \frac{-80 \text{ N}}{-0,04 \text{ m}} = 2000\,\text{N/m}$$

b. A **Figura 11.4** mostra a mola comprimida; nessa situação, sua coordenada é negativa ($x < 0$).

Na **Figura 11.5**, a coordenada da mola é positiva ($x > 0$), pois ela se encontra distendida.

Em ambas as situações ($x < 0$ ou $x > 0$), o sentido da força da mola é oposto ao sentido do vetor posição especificado pela coordenada x.

Quando x = 2,5 cm = 0,025 m, a força da mola tem intensidade:

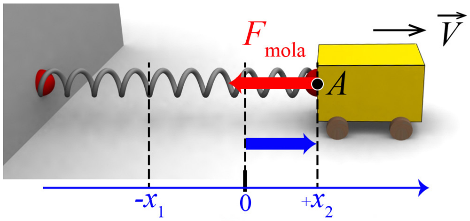

Figura 11.5: Exemplo de elongação da mola.

$$F_{\text{mola}} = -(2.000 \text{ N/m})(0{,}025 \text{ m}) = -50 \text{ N}.$$

11.5 Equação do movimento

Considerando-se uma força elástica agindo sobre um corpo de massa m, a lei de Newton se escreve:

$$ma = -kx \quad (11.4)$$

Lembrando a definição da aceleração como taxa de variação dupla em relação ao tempo, a equação **11.4** se escreve:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) \quad (11.5)$$

Temos diante de nós um problema típico e interessante da mecânica. Ele nos propicia a oportunidade de entender o poder do método proposto por Newton e que é a essência da sua segunda lei. Usualmente, procuramos relacionar força com aceleração, mas isso é apenas o primeiro passo. Muito simples, na realidade. O que é importante na Lei de Newton é determinar, a partir dessa relação, a posição e a velocidade da partícula, uma vez conhecidas as forças. É nisso que reside a importância da segunda lei.

A partir da equação de movimento **11.4**, devemos determinar a posição em qualquer instante de tempo. Para tanto devemos resolver a equação **11.5** que é, a rigor, uma equação diferencial de segunda ordem no tempo, ou seja, o problema se reduz ao de encontrar uma função do tempo, $x(t)$, de tal forma que, quando multiplicarmos a derivada segunda dessa função pela massa, encontremos um valor que é igual a $-k$ vezes essa função.

Infelizmente, não temos métodos gerais de encontrar soluções para equações diferenciais. Os casos estudados anteriormente são tais que as forças não dependem da posição e assim pudemos utilizar técnicas simples de encontrar primitivas de funções, ou seja, utilizamos o cálculo diferencial. Em geral, devemos recorrer a métodos específicos de soluções de equações diferenciais.

Uma dessas técnicas consiste em recorrer ao método da tentativa e erro. Podemos encontrar uma solução da equação acima por esse método. Nesse caso, a ideia é bastante simples. Sabemos que as funções cosseno e seno, quando consideradas como funções do produto de uma grandeza escalar ω pelo tempo t (ωt), são tais que suas derivadas primeiras com respeito ao tempo são dadas por:

$$\frac{d\cos\omega t}{dx} = -\omega \operatorname{sen}\omega t \quad 11.6$$

$$\frac{d\operatorname{sen}\omega t}{dx} = \omega\cos\omega t \quad 11.7$$

e, consequentemente, derivando a expressão **11.6**, e utilizando em seguida a expressão **11.7**, chega-se ao resultado :

$$\frac{d^2\cos\omega t}{dt^2} = -\omega^2\cos\omega t \quad 11.8$$

Analogamente, vale o resultado:

$$\frac{d^2\operatorname{sen}\omega t}{dt^2} = -\omega^2\operatorname{sen}\omega t \quad 11.9$$

Assim, a solução mais geral da equação **11.5** é uma combinação linear das duas soluções em **11.8** e **11.9**. É fácil verificar que a solução mais geral possível é da forma:

$$x(t) = C\operatorname{sen}\omega t + D\cos\omega t \quad 11.10$$

A solução depende, além da constante ω a ser determinada, de duas outras constantes C e D. Essas duas últimas constantes são determinadas a partir das condições iniciais:

$$x(0) \quad \text{e} \quad v(0) \quad 11.11$$

e é importante que tenhamos esse aspecto sempre em mente.

Considerando-se a propriedade do cosseno:

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\text{sen}(a)\text{sen}(b) \tag{11.12}$$

Pode-se ver que a solução geral pode ser escrita ainda sob uma forma inteiramente equivalente a **11.10**, ou seja:

$$x(t)=A\cos(\omega t+\theta_0) \tag{11.13}$$

Trata-se de uma solução envolvendo, de novo, três parâmetros desconhecidos e que serão determinados como segue.

Notemos, primeiramente, que a solução proposta **11.13** é tal que o valores máximos do deslocamento, x_M, e os valores mínimos, x_m, dos deslocamentos ocorrem para valores dados por:

$$x_M=A \qquad x_m=-A \tag{11.14}$$

Isso indica que o parâmetro A da expressão **11.3** é, portanto, a amplitude do movimento.

Denominamos o termo:

$$\omega t+\theta_0 \tag{11.15}$$

de fase do MHS. A constante θ_0 é uma fase inicial, a qual, por enquanto, é uma constante arbitrária. No entanto, ela pode ser determinada, assim como a amplitude, a partir das condições iniciais, ou seja, a partir do conhecimento de como se iniciou o movimento.

11.6 Período e Frequência

Analisaremos agora a constante ω. Substituindo a expressão **11.13** em **11.5** obtemos que a função cosseno é uma solução se ω for dado por:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{11.16}$$

E, portanto, a constante ω depende da massa e da constante elástica da mola. Veremos, a seguir, que essa constante está também relacionada ao período do movimento.

- Exemplo 2:

Determinar a relação $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ usando as equações **11.13** e **11.5** do texto.

→ Resolução

Primeiramente, determinamos a derivada de 2ª ordem, em relação ao tempo, da equação da elongação, ou seja, da coordenada associada a ela (equação **11.5**).

A partir da equação **11.13**, escrevemos a coordenada sob a forma: $x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$

A derivada primeira da coordenada é a velocidade, que é dada por:

$$v(t) = \frac{d\left[x(t)\right]}{dt} = \frac{d\left[A.\cos(\omega t + \theta_0)\right]}{dt} = -A\omega \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_0);$$

A derivada segunda da velocidade é a aceleração, ou seja:

$$\frac{d^2\left[x(t)\right]}{dt^2} = \frac{d\left[-A\omega.\text{sen}(\omega t + \theta_0)\right]}{dt} = -A\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega t + \theta_0)$$

A partir dessa equação, inferimos que a aceleração é dada por:

$$a(t) = \frac{d^2\left[x(t)\right]}{dt^2} = -\omega^2 \cdot x(t)$$

A Lei de Newton, equação **11.5**, é escrita agora como:

$$m(-\omega^2 x(t)) = -kx(t)$$

obtemos, assim, a relação entre a frequência angular e as constantes:

$m.\omega^2 = k$ ou $\omega^2 = k/m$, resultando a equação **11.16**.

Como dito anteriormente, o movimento do oscilador harmônico é periódico. O período é determinado a partir da condição bastante geral enunciada na introdução e que, nesse caso, é:

$$\begin{aligned} x(t+T) &= x(t) \\ v(t+T) &= v(t) \end{aligned} \qquad 11.17$$

Da solução proposta em **11.13**, segue-se que a condição para que o movimento seja período do movimento é:

$$\cos(\omega t + \omega T + \theta_0) = \cos(\omega t + \theta_0)$$
$$\text{sen}(\omega t + \omega T + \theta_0) = \text{sen}(\omega t + \theta_0) \quad 11.18$$

As condições acima são satisfeitas para valores de ωT tais que:

$$\omega T = 2\pi \quad 11.19$$

Portanto, o período do movimento harmônico simples é dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad 11.20$$

A frequência, sendo o inverso do período, será dada pela expressão:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{k}{m}}\frac{1}{2\pi} \quad 11.21$$

A frequência do oscilador harmônico depende, portanto, da massa da partícula e da constante elástica k.

11.7 Massa presa a uma mola

O exemplo mais simples de oscilador harmônico simples é constituído de uma massa m, que fica presa a uma mola. Para pequenos deslocamentos da mola, esse sistema exibe oscilações típicas de um oscilador harmônico simples.

Uma massa m, presa a uma mola de constante elástica k, experimenta uma força, quando colocada sobre uma mesa, dada pela expressão **11.3**.

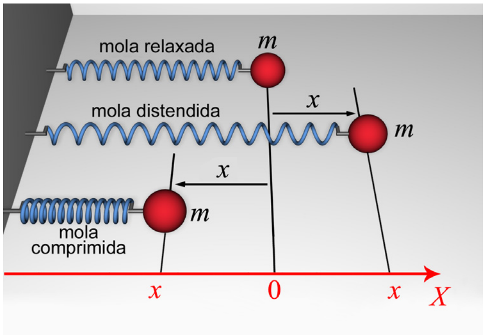

Figura 11.7: Exemplos de deslocamentos da mola.

- Exemplo 3:

Considere que o carrinho do sistema massa-mola do Exemplo 01 tenha massa m = 5 kg. Puxado para a esquerda do ponto de equilíbrio e depois solto, o sistema se comporta como um oscilador harmônico simples.

a. Qual o período T deste oscilador?
b. Qual a frequência deste oscilador?
c. Qual deve ser a massa do carrinho para que o período seja T = 1 s?

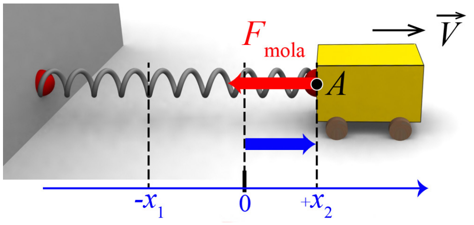

Figura 11.6: Exemplo de um sistema que se comporta como um oscilador harmônico simples.

→ Resolução

a. Período do oscilador.

Conforme a equação **11.20**, o período é inversamente proporcional à constante ω, ou seja, $T = (2\pi)/\omega$. Por outro lado, conforme a equação **11.16**

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2000\,\text{N/m}}{5\text{ kg}}} = 20(1/\text{s})$$

Portanto, $T = \dfrac{6,28}{20/s} = 0,314$ s.

O que isto significa? Cada vai e vem completo do carrinho tem duração de T = 0,314 s. Em outras palavras, o oscilador executa 100 vibrações completas em 31,4 s.

b. Frequência do oscilador.

A frequência é o número de vibrações que o oscilador executa na unidade de tempo. Conforme a equação **11.21**, temos:

$$f = 1/T = 1/0,314\text{ s} \cong 3,18/\text{s} = 3,18\text{ hertz}$$

$$(1\text{ hertz} = 1\text{Hz} = 1\text{ vibração/s})$$

c. Massa do carrinho para que o período seja T = 1 s.

Vamos analisar a equação **11.19**; dela resulta $T = (2\pi)/\omega$. Para T = 1 s tem-se $\omega = 2\pi$; como $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ [equação **11.16**] igualamos $\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi$. Elevando-se ao quadrado: $k/m = (2\pi)^2$, donde obtemos $m = \dfrac{k}{(2\pi)^2} = 2000/39,438 = 50,71\text{ kg}$. Portanto, para que o período do oscilador em questão seja T = 1 s, a massa total do carrinho deve ser m = 50,71 kg. Como $f = 1/T$, nessas condições, a frequência do oscilador será f = 1Hz.

No entanto, se a mola ficar presa ao teto, ela fica sob o efeito de duas forças.

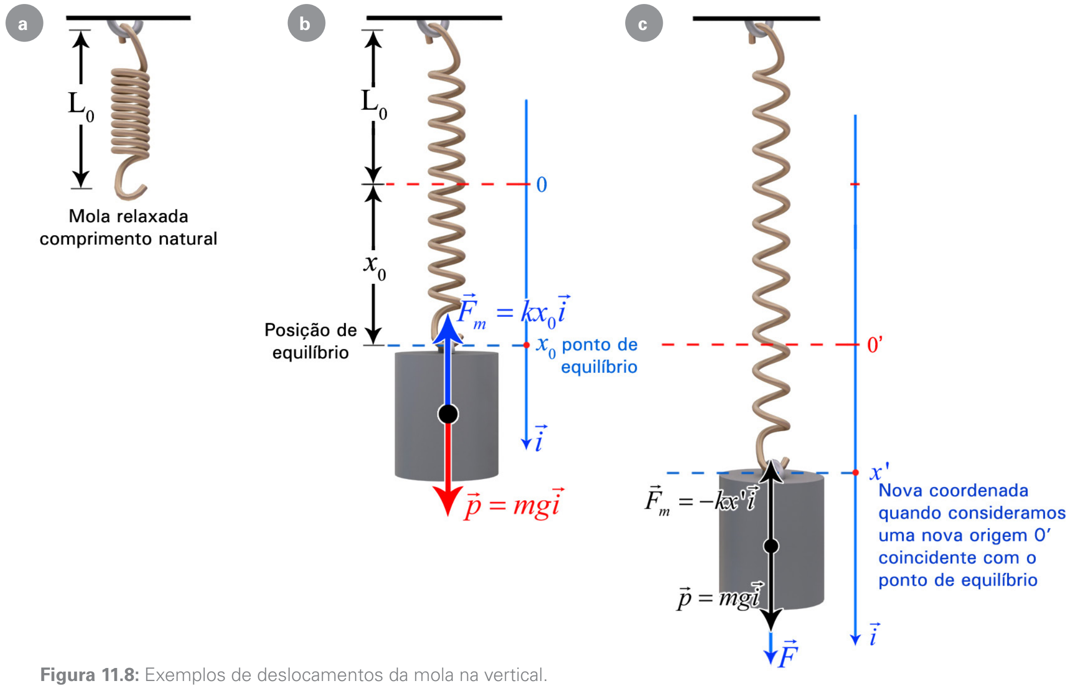

Figura 11.8: Exemplos de deslocamentos da mola na vertical.

Escrevemos, assim,

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = mg - kx(t) \quad 11.22$$

O ponto x_0 no qual as forças se anulam, o ponto de equilíbrio, é tal que:

$$mg - kx_0 = 0 \quad 11.23$$

Esse é o novo ponto de equilíbrio, em torno do qual o corpo executará um movimento harmônico simples. De fato, introduzindo uma nova variável definida por

$$x' = x - x_0 \quad 11.24$$

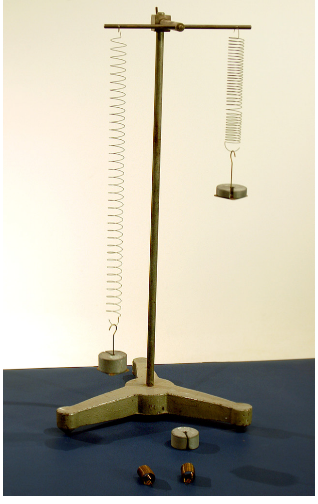

Figura 11.9: O período depende da massa.

a equação de Newton se escreve, para essa nova variável:

$$m\frac{d^2x'(t)}{dt^2} = kx'(t) \qquad 11.25$$

sendo x', em **11.25**, a coordenada associada à deformação da mola a partir da posição de equilíbrio. O movimento será harmônico simples com o período dado pela expressão **11.20**.

11.8 Velocidade e Aceleração no Movimento Harmônico Simples

Para uma solução da forma:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0) \qquad 11.26$$

a velocidade da partícula em função do tempo será dada pela expressão:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega\text{sen}(\omega t + \theta_0) \qquad 11.27$$

A aceleração varia, igualmente, com o tempo. Sua variação é análoga àquela da posição. Derivando a equação acima (vide exemplo 2), obtemos:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \theta_0) \qquad 11.28$$

Observe-se, da equação anterior e de **11.26**, que existe uma relação muito simples entre a aceleração e a posição de uma partícula. Obtemos:

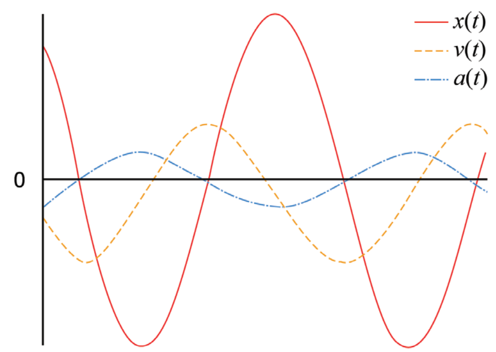

Figura 11.10: Gráficos de $v \times t$ e $a \times t$ do movimento harmônico simples.

$$a(t) = -\omega^2 x(t) \qquad 11.29$$

Essa relação decorre de uma propriedade geral do movimento harmônico simples. De fato, podemos definir o MHS como um movimento para o qual a relação **11.29** é válida.

Observando a expressão **11.27**, notamos que os valores máximos para a velocidade v_M e os valores mínimos da velocidade v_m são dados por:

$$v_M = \omega A$$
$$v_m = -\omega A \qquad 11.30$$

Para os valores máximos, a_M, e mínimos, a_m, da aceleração valem relações análogas a essas. Temos:

$$a_M = \omega^2 A = \omega v_M$$
$$a_m = -\omega^2 A = -\omega v_M \qquad 11.31$$

É importante observar que, quando o móvel atinge os valores máximos (x_M) e mínimos (x_m) do deslocamento, a velocidade do móvel é nula. São os pontos de inversão do sentido do movimento. Nos pontos de maior velocidade (em qualquer direção), os valores tanto do deslocamento quanto da aceleração são nulos.

- Exemplo 4:

Uma mola de constante elástica k = 2.000 N/m tem uma extremidade fixada numa parede e a outra, num carrinho de massa m = 5 kg, que pode se movimentar numa superfície horizontal sem atrito.

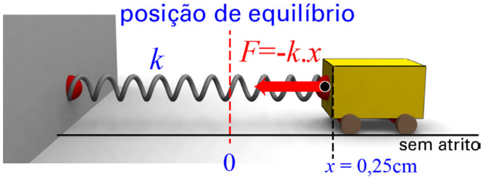

Figura 11.11: Ilustração alusiva ao exemplo 4.

A partir da posição de equilíbrio, o carrinho é puxado para a direita até que a elongação da mola corresponda ao valor: x = 0,25 m. Esse é o valor da amplitude $x_M = A$ = 0,25 m. Depois de solto, o sistema se comporta como um oscilador harmônico, realizando o Movimento Harmônico Simples.

a. Determinar o período T e a frequência f deste oscilador harmônico.

b. A partir da equação horária geral da coordenada do oscilador harmônico [$x(t) = A.\cos(\omega t + \theta_0)$], determine as constantes A, ω e θ_0 para o caso em estudo.

→ Resolução

a. A frequência angular é dada por $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2000\,\text{N/m}}{5\,\text{kg}}} = 20\left(\frac{1}{\text{s}}\right)$.

Conforme definido na equação **11.20**, o período e a frequência são dados, respectivamente, por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20/\text{s}} = \frac{\pi}{10}\text{s} = 0{,}1\pi\ \text{s}$$

$$f = 1/T = \frac{10}{\pi}\ \text{Hz}$$

b. Adotando o eixo 0x, horizontal, e orientado para a direita, as condições iniciais do movimento para t = 0 são:

$$v_0 = 0 \quad \text{e} \quad x(t=0) = +0{,}25\text{m}$$

A amplitude do movimento é A = 0,25 m (elongação máxima; ela corresponde à coordenada abscissa do ponto onde o carrinho foi solto).
Substituindo-se A e ω na equação geral ($x(t) = A.\cos(\omega t + \theta_0)$, temos:

$$x(t) = (0{,}25).\cos(20t + \theta_0)$$

E para a velocidade:

$$v(t) = -5.\,\text{sen}(20t + \theta_0)$$

Para completar a equação, resta determinarmos a fase θ_0. Para isso usamos a condição: $v(t = 0) = 0$; portanto, resulta: $\text{sen}\theta_0 = 0$, ou seja, θ_0 = 0°, 360°, 720°, ... Vamos escolher a opção mais simples: θ_0 = 0. Assim, a equação horária levando em conta as condições iniciais, será:

$$x(t) = (0{,}25).\cos(20t)$$

- Exemplo 5:

a. Considere o oscilador harmônico do Exemplo 4. Escreva a equação horária da velocidade do carrinho e determine em quais instantes $v(t)$ = 0 bem como em que instantes ela é máxima ou mínima.

b. Determinar a equação horária da aceleração do carrinho. Em quais situações ela é nula? E em quais ela é máxima ou mínima?

→ Resolução

a. A velocidade pode ser obtida pela derivada de 1ª ordem da equação horária da coordenada. Assim,

$$v(t) = \frac{d\left[(0{,}25)\cos(20t)\right]}{dt} = -5.\,\text{sen}(20t)$$

- Velocidade nula

Para se determinar os instantes nos quais $v(t)$ = 0, resolve-se a equação:

$$v(t) = -5.\text{sen}(20.t) = 0,$$

o que implica instantes de tempo para os quais sen(20t) = 0, ou seja, o argumento (20t) = 0°, 180°, 360°, 540°, ... ou, genericamente, 20t = $N.\pi$ com N = 0,1,2,3,.... Logo, $t = \frac{N \cdot \pi}{20}$ s com N = 0,1,2,3 ... A **Tabela 11.1** consolida os cálculos.

Tabela 11.1

N	$t = N\cdot\pi/20$ s	**Argumento:** $(20\cdot t)$ (rad)	$V(t) = -5\cdot\text{sen}(20t)$ m/s	$x(t) = (0{,}25)\cdot\cos(20t)\cdot m$
0			0	+ 0,25
1	$(\pi/20) = (T/2)$	π	0	-0,25
2	$2(\pi/20) = T$	2π	0	+ 0,25
3	$3(\pi/20) = 3(T/2)$	3π	0	- 0,25

Observação: como o período é $T = \pi/10$, podemos escrever $\pi = 10T$ que substituído em $t = \pi/20 = (10T)/20 = T/2 = (1/2)T$ (meio período). E assim sucessivamente.
Constata-se que a velocidade se torna nula nas posições de elongação máxima $x = A = 0{,}25$ m e $x = A = -\ 0{,}5$ m, que são as posições nas quais o carrinho inverte o sentido do movimento.

- Velocidade máxima e mínima

A velocidade é expressa pela função $v(t) = -5\text{sen}\ (20t)$. Tal como no cálculo, para se determinar os máximos e mínimos de uma função, iguala-se a zero a derivada de 1ª ordem da função.

Assim, $\dfrac{dv(t)}{dt} = \dfrac{d(-5\,\text{sen}\,20t)}{dt} = -100.\cos(20t) = 0$

Para que isso ocorra, devemos ter $\cos(20t) = 0$, ou seja, $20t = 90°, 270°, 450°$, etc. ou $20t = N'\cdot\dfrac{\pi}{2}$ com $N' = 1,3,5,..$ Assim, $20t = N'\cdot\dfrac{\pi}{2}$, donde $t = N'\cdot\dfrac{\pi}{40}$ s com $N' = 1,3,5,...$

Para saber se a velocidade é máxima ou mínima, vejamos os valores de t na equação da velocidade. A **Tabela 11.2** consolida os cálculos:

Tabela 11.2

N'	$t = N\cdot\pi/40$ s	**Argumento:** $(20\cdot t)$ (rad)	$V(t) = -5\cdot\text{sen}(20t)$ m/s	$x(t) = (0{,}25)\cdot\cos(20t)\cdot m$
1	$\pi/40 = T/4$	$\pi/2$	– 5	0
3	$3(\pi/40) = 3(T/4)$	$3(\pi/2)$	+ 5	0
5	$5(\pi/40) = 5(T/4)$	$5(\pi/2)$	– 5	0
7	$7(\pi/40) = 7(T/4)$	$7(\pi/2)$	+5	0

Observa-se que a velocidade é máxima quando o carrinho passa pela posição de equilíbrio $x = 0$. A velocidade é máxima ($v = +\ 5$ m/s) quando o carrinho passa por $x = 0$ no sentido positivo do eixo $0x$ e é mínima ($v = -\ 5$ m/s) quando passa em sentido oposto.

b. Equação horária da aceleração do carrinho. Em quais situações ela é nula? E em quais ela é máxima ou mínima?

A aceleração é obtida meio da derivada de 1ª ordem da velocidade, ou seja, $a = \frac{dv(t)}{dt}$ (ou que é equivalente, pela derivada de 2ª ordem da coordenada, ou seja, $a = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$). Portanto:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d\left[-5.\text{sen}(20t)\right]}{dt} = -100.\cos(20t)$$

- Aceleração nula

A aceleração é nula quando $-100.\cos(20t) = 0$. Isto ocorre quando o argumento da função cosseno for tal que $(20t) = N.\pi/2$ com $N = 1,3,5,7,...$. O tempo correspondente será $t = N.(\pi/40)$ s. A **Tabela 11.3** consolida as posições onde $a = 0$.

Tabela 11.3

N	$t = N{\cdot}\pi/40$ s	**Argumento:** $(20{\cdot}t)$ (rad)	$a(t) = -100.\cos(20t)$ m/s²	$x(t) = (0{,}25).\cos(20t).m$
1	$\pi/40 = T/4$	$\pi/2$	0	0
3	$3(\pi/40) = 3(T/4)$	$3(\pi/2)$	0	0
5	$5(\pi/40) = 5(T/4)$	$5(\pi/2)$	0	0
7	$7(\pi/40) = 7(T/4)$	$7(\pi/2)$	0	0

Quando o carrinho passa (em qualquer sentido) pela posição de equilíbrio ($x = 0$), a aceleração do carrinho é momentaneamente zero.

- Aceleração máxima ou mínima

Os máximos e mínimos de uma função podem ser obtidos igualando a zero a derivada primeira da função. No caso da aceleração, temos: $a(t) = -100.\cos(20t)$. Portanto,

$$\frac{da(t)}{dt} = \frac{d\left[-100.\cos(20t)\right]}{dt} = 0,$$

ou seja, $2000.\text{sen}(20t) = 0$. Portanto, para o argumento $(20t) = N'.\pi$, com $N' = 0,1,2,3,...$ a aceleração será um máximo ou um mínimo. A **Tabela 11.4** consolida as informações.

Tabela 11.4

N'	$t = N'{\cdot}\pi/20$ s	**Argumento:** $(20{\cdot}t)$ (rad)	$a(t) = -100.\cos(20t)$ m/s²	$x(t) = (0{,}25).\cos(20t).m$
0			– 100	+ 0,25
1	$(\pi/20) = (T/2)$	π	+ 100	– 0,25
2	$2(\pi/20) = T$	2π	– 100	+ 0,25
3	$3(\pi/20) = 3(T/2)$	3π	+100	– 0,25

Constata-se que a aceleração é mínima (a = −100 m/s²) quando a coordenada x é máxima (x = + 0,25m) e é máxima (a = + 100 m/s²) quando a coordenada é mínima. Em x = + 0,25 m, a aceleração é para a esquerda (no sentido negativo do eixo 0x) e em x = −0,25 m, ela é para a direita (sentido positivo do eixo 0x).

Vamos resolver um exemplo no qual o sistema massa-mola oscila na vertical. As elongações devem ser medidas em relação à situação de equilíbrio.

- Exemplo 6:

Uma mola cuja constante elástica é k = 400 N/m, tendo uma de suas extremidades fixa no teto do laboratório, pende livremente na vertical.

Na sua extremidade livre é preso um objeto de massa m = 4 kg. A mola alonga-se num montante y_0 até encontrar a posição de equilíbrio.

Em seguida, o objeto é levado até uma elongação caracterizada por y = −0,10 m (em relação ao ponto de equilíbrio), de onde, após solto, funciona como um oscilador harmônico simples (MHS). Adotar g = 10 N/kg.

a. Determinar a coordenada y_0 da mola.
b. Escrever a equação do MHS deste sistema massa-mola.
c. Determinar o período do movimento.
d. Escrever as equações da velocidade e da aceleração.

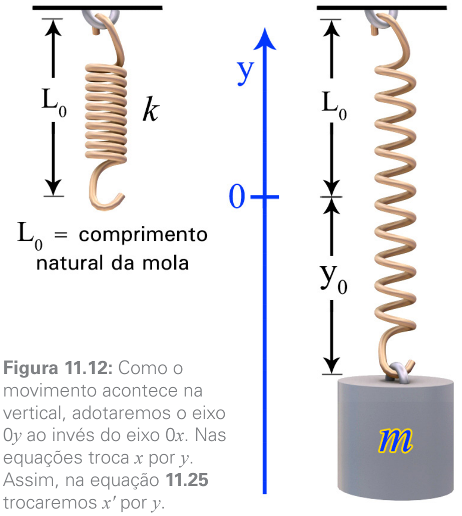

Figura 11.12: Como o movimento acontece na vertical, adotaremos o eixo 0y ao invés do eixo 0x. Nas equações troca x por y. Assim, na equação **11.25** trocaremos x' por y.

→ Resolução

a. coordenada y_0 do ponto de equilíbrio.

Na situação de equilíbrio, o peso do objeto é equilibrado pela força elástica da mola, ou seja, $mg = -ky_0$, donde obtemos:

$$-y_0 = \frac{mg}{k} = \frac{4\times 10\ \text{kg.N/kg}}{400\,\text{N/m}} = 10^{-1}\ \text{m} = 0{,}1\ \text{m}.$$

Portanto, como resultado do peso do objeto pendurado, a mola distende-se 10 cm, que é sua elongação.

b. equação do MHS

A equação geral do MHS é dada pela equação **11.26** do texto (trocando x por y), a qual nesse caso é dada por:

$$y(t) = A.\cos\left[\omega.t + \theta_0\right]$$

Resta determinar, para este caso, os valores das constantes A, ω, e θ_0.

- A amplitude A do movimento.

No instante t = 0, a velocidade é $v(t = 0) = 0$; e a coordenada nesse instante é: $y(t = 0)$ = -0,10 m. Assim, a amplitude do movimento é A = 0,10 m. Observação: se o eixo 0y fosse orientado para baixo, teríamos nesse caso $y(t=0)$ = 0,10 m.

- A constante ω do movimento, determinada pela massa e pela constante da mola:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400\,\mathrm{N/m}}{4\ \mathrm{kg}}} = \sqrt{100} \times \sqrt{\frac{\left(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s^2}\right)\mathrm{m}}{\mathrm{kg}}} = 10\left(\frac{1}{\mathrm{s}}\right).$$

Podemos, então, escrever a equação horária do movimento, a menos da fase θ_0, como:

$$y(t) = (0{,}10).\cos\left[10.t + \theta_0\right] \quad (\mathrm{SI})$$

A fase θ_0 pode ser determinada a partir das informações sobre as condições iniciais. Para $t = 0$, temos $v(t = 0) = 0$; logo $0 = -1\mathrm{sen}[10 \times 0 + \theta_0]$, que resulta $0 = -v\ \mathrm{sen}\ (\theta_0)$); donde, $\theta_0 = 0$ ou $N.\pi$ rad. A solução mais simples e compatível com a condição inicial para y é $\theta_0 = \pi$.
Portanto, a equação do movimento pode ser assim expressa:

$$y(t) = (0{,}10).\cos\left[10.t + \pi\right] = -(0{,}10).\cos(10.t)$$

c. O período do movimento.
Conforme a equação **11.20**, o período do movimento é dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6{,}28}{10\left(\frac{1}{\mathrm{s}}\right)} = 0{,}628\ \mathrm{s}$$

d. As equações da velocidade e da aceleração a qualquer tempo.
A velocidade é obtida a partir da derivada de 1ª ordem da equação horária da coordenada y (no caso, da equação do MHS). Assim,

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{\left[-0{,}1.\cos(10.t)\right]}{dt} = -(0{,}10).\left[-\mathrm{sen}(10.t)\right].(10) = \mathrm{sen}(10.t)$$

A aceleração é obtida a partir da derivada de 1ª ordem da velocidade, ou seja,

$$a(t) = \frac{d\left[\mathrm{sen}(10.t)\right]}{dt} = \cos(10.t)(10) = 10.\cos(10.t)$$

11.9 O Pêndulo simples

O movimento do pêndulo simples pode se constituir num exemplo de movimento harmônico simples. Ele ocorre se o movimento for restrito a pequenas oscilações, isto é, ângulos de abertura do pêndulo muito pequenos.

O pêndulo simples consiste num objeto (uma pequena esfera, por exemplo) preso por um fio de massa desprezível. Numa determinada posição do pêndulo, temos duas forças atuando sobre o objeto: a tração do fio e a força peso.

Quando o fio é preso por um ponto no teto, por exemplo, o corpo preso a ele se move num movimento circular (mas não uniforme). Ele ocupa, no entanto, apenas uma parte da circunferência.

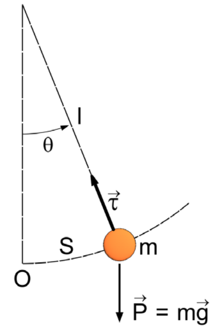

Figura 11.13: Forças agindo sobre o objeto que executa, para pequenas amplitudes, o MHS.

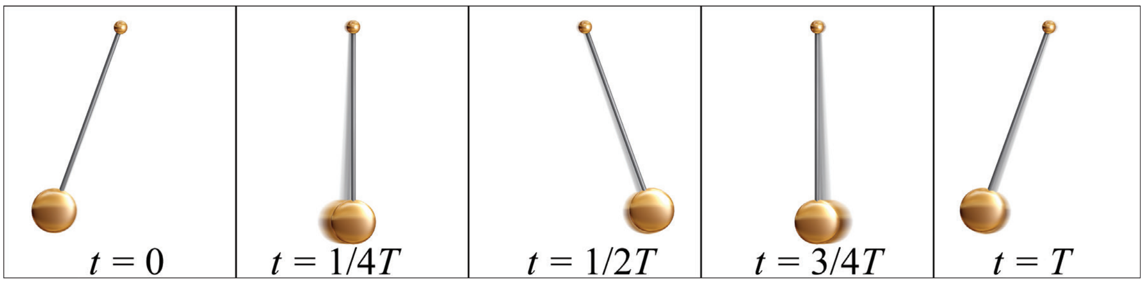

Figura 11.14: Posição do pêndulo para diferentes instantes de tempo ao longo de um período.

Analisemos em detalhe tal movimento. Primeiramente, lembramos que para uma abertura do pêndulo de um valor θ, a componente tangencial à circunferência da força peso é dada pela expressão:

$$F_{tan} = -mg\,\text{sen}\,\theta \qquad 11.32$$

Para ângulos pequenos, podemos escrever, dentro de uma boa aproximação:

$$\text{sen}\,\theta \cong \theta \qquad 11.33$$

A aceleração tangencial (a componente azimutal) é dada por:

$$a_{tan} = l\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad 11.34$$

De acordo com a lei de Newton, podemos escrever:

$$ma_{\tan} = F_{\tan} \Rightarrow lm\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{11.35}$$

Para pequenas amplitudes do movimento, a lei de Newton se escreve:

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta \tag{11.36}$$

O movimento é, portanto, harmônico simples, pela definição **11.3**. Nesse caso, no entanto, temos:

Figura 11.15: Exemplo de um relógio a pêndulo.

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \tag{11.37}$$

O período do pêndulo simples é, pois:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{11.38}$$

O período é, portanto tanto maior quanto maior for o comprimento do pêndulo e decresce com o aumento da aceleração da gravidade. Assim, o mesmo pêndulo localizado em posições diferentes do globo terrestre exibirá, eventualmente, períodos de oscilação diferentes.

Para a frequência do movimento, podemos escrever:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{11.39}$$

Portanto, para oscilações de pequena amplitude, o período do pêndulo simples não depende da amplitude. Esse fato foi verificado experimentalmente por Galileu. Essa propriedade é conhecida como isocronismo. O isocronismo do pêndulo foi determinante no seu uso, depois da descoberta de Galileu, na construção de relógios a pêndulo.

- Exemplo 7:

Um pêndulo com massa m = 100 g e comprimento L é posto a oscilar com pequenas amplitudes. O período mensurado foi T = 1 s. Considere g = 9,8 m/s².

Determinar:

a. O comprimento L deste pêndulo.

b. Qual seria o período deste pêndulo quando colocado a oscilar na superfície da Lua, onde a aceleração da gravidade é 1,63 N/kg (m/s²)?

→ Resolução

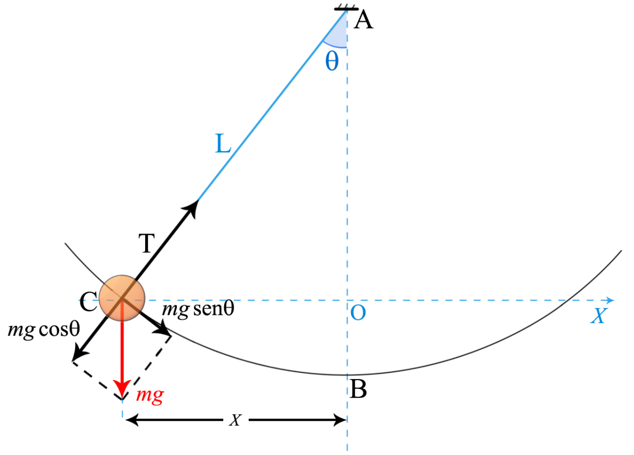

Figura 11.16: decomposição das forças agindo sobre o corpo que oscila.

a. A partir da equação **11.38** do texto, $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, o comprimento do pêndulo em estudo pode ser determinado. Elevando ao quadrado essa expressão, obtemos:

$$L = \frac{T^2 . g}{4\pi^2} = (1\ \text{s})^2 \left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \Big/ 4(3{,}14)^2 = 0{,}2485\ \text{m} \cong 25\ \text{cm}.$$

Portanto, o período de um pêndulo de comprimento L = 25 cm é T = 1 s.

b. Diferentemente do sistema massa-mola, onde o período não depende da gravidade, no pêndulo simples ele é fundamental. Em particular, um pêndulo não oscila numa região onde inexista gravidade. No caso da Lua, o período é dado por:

$$\text{T}_{\text{Lua}} = 2\pi\sqrt{L/g} = 6{,}28\sqrt{0{,}25/1{,}63}$$

Donde inferimos que o mesmo pêndulo, quando colocado a oscilar na Lua, teria um período de T_{Lua} = 2,46 s.

11.10 Elasticidade dos Materiais

Mediante a aplicação de forças (ou esforços) podemos alterar a forma e/ou o tamanho dos corpos materiais. Um corpo pode ser deformado de várias formas distintas: ele pode ser alongado, comprimido ou torcido.

Forças de pequena intensidade induzem um comportamento dito elástico. Trata-se de uma propriedade dos corpos materiais mediante a qual eles tendem a restaurar sua forma original, uma vez removidas as forças deformantes que sobre eles atuam.

Os esforços mais simples são aqueles nos quais os corpos são deformados mediante a aplicação de apenas um par de forças tendo elas sentidos opostos e aplicadas, no entanto, em pontos diferentes do corpo. Nesse caso nos referimos a trações e compressões.

No caso da tração, as forças são, tipicamente, de afastamento das várias partes do corpo. Consequentemente, ele sofrerá um alongamento na direção do par de forças.

No caso da compressão as forças tendem a aproximar as várias partes do corpo. Ou seja, o corpo será encurtado na direção do par de forças.

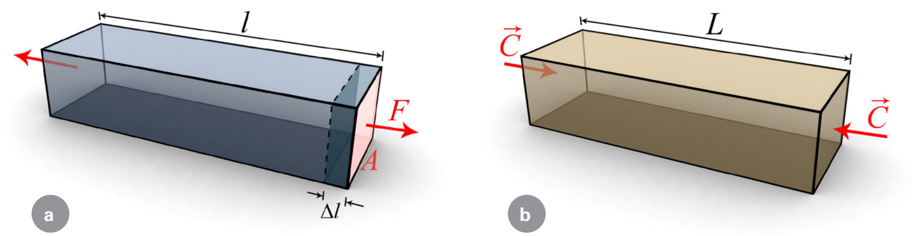

Figura 11.17: Forças de tração e compressão.

As forças de tração aplicadas a uma barra, por exemplo, são transmitidas via interação entre os diminutos átomos, a todas as partes da barra. A elas se opõem as forças coesivas. Tais forças são de natureza atrativa e visam impedir o afastamento dos átomos e, consequentemente, das várias partes do material como um todo. Cada átomo contribui para as forças coesivas exercidas pelos materiais que assim reagem à deformação imposta pelas forças de tração.

No caso da compressão, as forças coesivas, agora repulsivas, resultam do caráter repulsivo das forças interatômicas.

Definimos a Tensão S (de stress em inglês) agindo sobre o material como o quociente:

$$S = \frac{F}{A} \tag{11.40}$$

onde F é a força de tração ou compressão, e A é a área sobre a qual ela é aplicada.

A força de tração aplicada provocará um alongamento da barra por um valor $\Delta\ell$. Para pequenos alongamentos, vale a Lei de Hooke:

$$F = k\Delta\ell \tag{11.41}$$

onde k é a constante elástica do material.

Definimos a deformação longitudinal (S_l) de um corpo como o quociente do alongamento $\Delta\ell$ e o comprimento original, isto é:

$$S_l = \frac{\Delta\ell}{\ell} \tag{11.42}$$

Pode-se introduzir uma gradação da elasticidade de um corpo por meio de uma constante física, característica do material, denominada constante de Young (Y). Tal constante é definida pela relação:

$$Y \equiv \frac{S}{S_\ell} \tag{11.43}$$

Utilizando **11.40** e **11.42** em **11.43**, obtemos:

$$Y \equiv \frac{F}{\Delta\ell}\left(\frac{\ell}{A}\right) \tag{11.44}$$

11.11 Resistência dos Materiais

Na **Figura 11.18** apresentamos um gráfico típico do comportamento de um amplo conjunto de materiais na fase sólida quando submetidos a tensões. Em geral, os materiais se comportam como materiais elásticos (retornando à situação original uma vez removida as forças) desde que a deformação longitudinal não ultrapasse um determinado valor, um valor dito crítico. Tal valor depende do material.

A região elástica e linear ocorre para valores da deformação longitudinal, desde que menores do que o valor crítico. Ela é a região para a qual vale a lei de Hooke, a região dita linear do material. Nela o módulo de Young depende apenas de constantes características do material. Isto é:

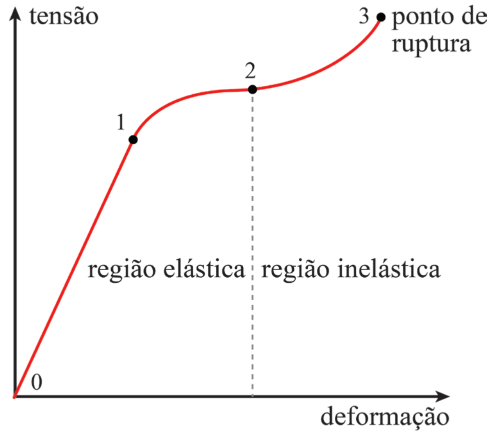

Figura 11.18: Comportamento típico de materiais elásticos.

$$Y = \frac{k\ell}{A} \qquad 11.45$$

Como as forças coesivas não crescem indefinidamente, os materiais não resistem indefinidamente a valores de trações e compressões. A partir de um valor crítico, ou máximo, da tração, ou da compressão, ocorre a ruptura do material. Tal ponto de ruptura é destacado nas **Figuras 11.3** e **11.18**.

A **Tabela 11.5** apresenta valores de trações máximas suportadas por alguns materiais.

Tabela 11.5: Intensidades máximas suportáveis por alguns materiais.

Material	Intensidade máxima suportável em dina/cm²
Osso Humano	$150 \cdot 10^7$ compressão $100 \cdot 10^7$ tração
Aço	$450 \cdot 10^7$
Alumínio	$69 \cdot 10^7$
Tendão	$68 \cdot 10^7$ tração
Músculo	$0{,}5 \cdot 10^7$ tração

• Exemplo 8

Admita que um osso permaneça elástico e obedecendo a Lei de Hooke até sua ruptura. Nessas circunstâncias, qual é a energia necessária para quebrar um osso de área A e comprimento L?

→ Resolução:

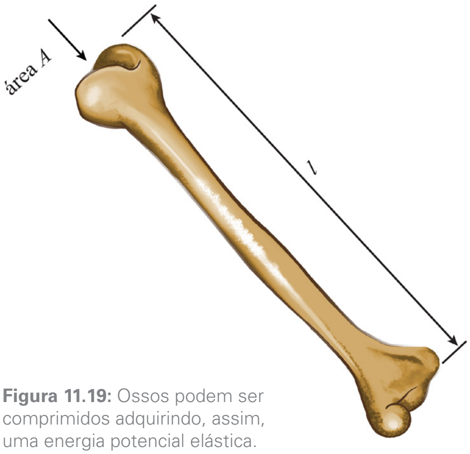

Figura 11.19: Ossos podem ser comprimidos adquirindo, assim, uma energia potencial elástica.

Admitindo que a tensão de quebra, ou fratura, seja S_q, a força necessária para fraturá-lo será dada por:

$$F_q = S_q A \tag{11.46}$$

Assim, a compressão do osso nesse ponto será:

$$\Delta\ell = \frac{S_q}{Y}\ell \tag{11.47}$$

A energia do osso comprimido no ponto de fratura será dada por:

$$E = \frac{k}{2}(\Delta\ell)^2 = \frac{YA}{2\ell}(\Delta\ell)^2 = \frac{A\ell}{2Y}S_q^{\;2} \tag{11.48}$$

• Exemplo 9

Considere o caso de um salto de altura h de uma pessoa de 70 kg. Admitindo que toda a energia potencial se converta em energia elástica do osso, qual a máxima altura da qual se pode saltar em segurança?

→ Resolução:

Imaginemos a situação na qual depois do salto a pessoa se apoia nos dois ossos da perna. Consideremos o caso de um indivíduo com uma perna de 1 m e área média do osso de apoio de 8 cm². Para o osso fêmur assumimos S_q = 90 dina/cm². Da **Tabela 11.5** constatamos que $Y = 14 \cdot 10^{10}$ dina/cm². Assim, de **11.48**, obtemos o seguinte valor para a energia elástica de cada perna:

$$E = \frac{1}{2}\frac{8\cdot 100.10^{18}}{14\cdot 10^{10}} = \frac{200}{7}\cdot 10^{8}\ \text{ergs} \tag{11.49}$$

Levando em conta as duas pernas, a conversão da energia potencial em energia elástica nos leva ao valor da altura segura:

$$h = \frac{2E}{mg} \tag{11.50}$$

Essa expressão nos leva a uma altura de aproximadamente 80 centímetros. Sabemos, por experiência, que é seguro saltar de alturas um pouco maiores do que essa.

A hipótese de transformação integral da energia potencial em elástica não é correta. Vale apenas como uma aproximação. Numa queda, ao aterrissar, a energia cinética de uma pessoa é distribuída, por meio de contorções, para várias partes do corpo. De qualquer forma, o que há de correto nessa hipótese é que fraturas de ossos podem ocorrer mesmo para quedas de pequenas alturas.

Agora é sua vez...

Acesse o Ambiente Virtual de Aprendizagem e realize a(s) atividade(s) proposta(s).