ENERGIA MECÂNICA 13

Gil da Costa Marques

13.1 Introdução

A partir do final do século XIX, o termo energia passou a se incorporar cada vez mais às preocupações dos pensadores e por isso se tornou um tema de pesquisas científicas. No início do século XX, esse termo passou a fazer parte dos problemas cotidianos das pessoas, especialmente em relação ao seu custo. Nos dias atuais, a disponibilidade de energia passou a ser um fator de desenvolvimento. Energia é, portanto, a mola propulsora do desenvolvimento, do progresso. Por isso, a relevância de programas tanto com relação à geração quanto à conservação de energia. A busca por fontes alternativas de energia é uma preocupação nos dias de hoje e, levando-se em conta o aumento constante do seu consumo, ela será perene.

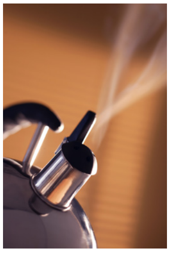

Figura 13.1 / Fonte: Thinkstock

No cotidiano, associamos energia à capacidade de realização de tarefas (os físicos preferem a palavra trabalho). Podemos definir a energia de um sistema como a sua capacidade de realizar ou passar, ele mesmo, por transformações. Essas definições refletem o sentido original da palavra grega *energeia* – ἐνέργεια, que pode ser traduzida por atividade ou, ainda, operatividade. Aquilo que tem energia é, nesse sentido da palavra, ativo e operante.

O conceito de energia emergiu, pela primeira vez, a partir da ideia de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) de pensar na existência de duas categorias de "forças". A primeira seria constituída pelas forças fundamentais, ou mortas, tais como a força gravitacional, elétrica etc. A segunda categoria deu o nome de "*vis viva*", que na melhor tradução na linguagem de hoje é "força viva". Sendo a força viva definida por ele como associada a "uma quantidade infinita de impressões das forças elementares", podemos identificá-la hoje como igual ao trabalho ou como a variação da energia cinética de uma partícula.

Thomas Young recebe o crédito por ter usado pela primeira vez, em 1808, o termo "energia" em vez de força viva, dando a essa palavra o sentido empregado ainda nos dias de hoje. De qualquer forma, a ideia de associar a um sistema físico uma grandeza que represente uma medida da sua capacidade de realizar atividades, ou transformações, parece estar contida na proposta original de Leibniz de associá-la a um novo de tipo de "força" ou *vis*.

À medida que esse conceito físico ganhava importância, passamos a discuti-lo mais e mais na literatura científica. Nos primórdios, questionava-se se a energia seria uma substância, que era identificada como o calórico ou uma nova grandeza física como, por exemplo, a quantidade de movimento. Esta última noção, a de grandeza física, afinal, acabou prevalecendo.

O fato é que o conceito de energia evoluiu paulatinamente com o tempo. Einstein, em 1905, deu uma grande contribuição ao tema ao chamar a atenção para a equivalência entre massa e energia. Aprendemos assim que a massa se constitui ela mesma em energia; é uma forma de energia intrínseca à matéria.

> Existem muitas formas de energia. Em **Formas de Energia** apresentaremos o conceito mais geral das formas de energia, analisando algumas delas.

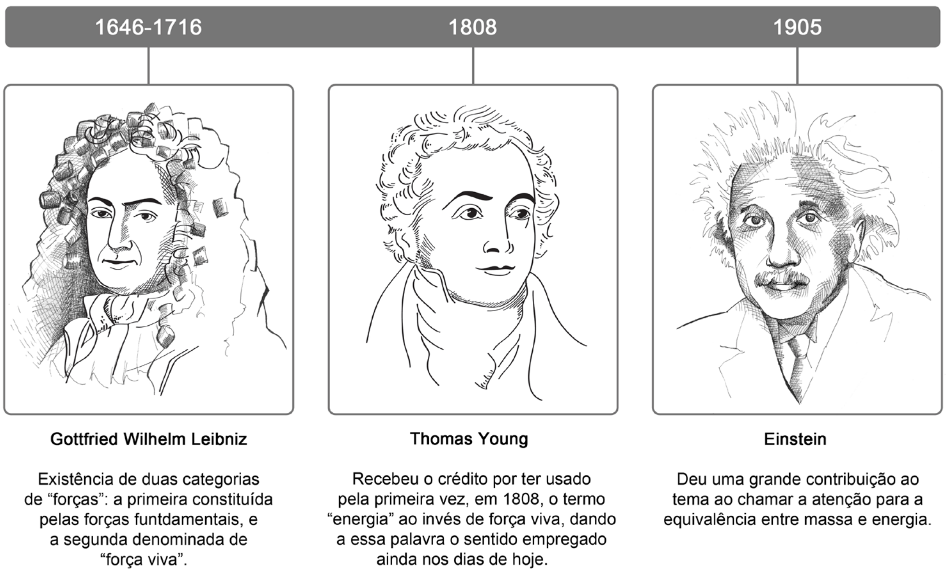

Figura 13.2: Linha do tempo.

13.2 A Energia Cinética

Um objeto, pelo simples fato de estar em movimento, tem energia. A energia de movimento é denominada energia cinética. A força viva de Leibnitz pode ser identificada como essa forma de energia (na realidade, duas vezes essa grandeza). Em 1740, Emilie marquise du Châtelet mostrou que a força viva proposta por Leibnitz é proporcional à massa do corpo e ao quadrado da sua velocidade. Gustave-Gaspard Coriolis introduziu, em 1829, o termo "energia cinética", dando a ele a conotação moderna de energia associada ao estado de movimento de um corpo.

Assim, existe uma forma de energia que está associada inteiramente ao movimento, isto é, está associada ao estado de movimento (à velocidade, mais precisamente). Tal energia é denominada Energia Cinética (cinético, em grego, significa movimento). Para uma partícula de massa m e velocidade $\vec{v}$, a sua energia cinética é dada pela expressão:

$$E_c = \frac{m}{2}\vec{v}^2 = \frac{\vec{p}^2}{2m} \qquad 13.1$$

Na expressão **13.1**, $\vec{p} = m.\vec{v}$ representa uma grandeza física denominada "momento linear ou quantidade de movimento linear" de uma partícula de massa m e velocidade $\vec{v}$.

Note que, quanto maior for a velocidade e a massa de um objeto, tanto maior será a sua energia cinética. A expressão acima está de acordo com a nossa experiência cotidiana. Sabemos que um carro em movimento pode realizar tarefas, algumas delas absolutamente desnecessárias, como derrubar postes, derrubar muros ou deformar laterais de outros carros. O estrago provocado em acidentes é tanto maior quanto maior a velocidade do veículo. Por outro lado, uma jamanta, por ter uma massa maior do que um automóvel, é capaz de fazer mais estragos do que este (até mesmo a uma velocidade menor).

Figura 13.3: Conversão de energia cinética associada a diferentes veículos.

Exemplos

- Exemplo 1:

Uma "bala" de massa $m = 8 \times 10^{-3}$ kg é ejetada de um fuzil com velocidade $v = 720$ m/s.

1. Qual a energia cinética da "bala"?
2. Compare essa energia com outras necessárias para realizar atividades corriqueiras.

→ Resolução

a. Energia cinética da bala

Conforme a definição, a energia cinética da bala é dada por:

$$E_c = (1/2)mv^2 = (1/2)\left(8\times10^{-3}\ \text{kg}\right)(720\ \text{m/s})^2 = (1/2)\left(8\times10^{-3}\right)(720)^2\left[\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2\right]$$

Portanto,

$$E_c = (1/2)\left(8\times10^{-3}\right)(720)^2\left[\text{kg}\times\text{m}^2/\text{s}^2\right] = 2.074\ \text{J}$$

onde

J = kg (m²/s²) = joule , unidade de energia no Sistema Internacional (SI) de Unidade.

b. Comparação

Vamos comparar essa energia com aquela associada a um evento no cotidiano: a tarefa de erguer um litro de água mineral (de 1 kg), na direção vertical e ao longo de uma distância de 1 m, exige uma quantidade de energia igual a E = 10 J.

O que se pode fazer com uma energia igual a 2.074 J? Ela corresponde à tarefa de erguer a massa de 207 litros de água de uma só vez ao longo de 1 m de altura!

- Exemplo 2:

No momento do saque, uma bola de tênis de massa $m = 60 \times 10^{-3}$ kg (60 g) pode ser arremessada horizontalmente com momento linear p = 4,5 kg.m/s.

a. Qual a energia cinética da bola nessas circunstâncias?

b. Qual é a velocidade escalar da bola ao ser arremessada?

→ Resolução

A energia cinética pode ser expressa em função do momento linear e da massa da partícula (vide **3.1**).

a. Nesse caso, a energia cinética é, portanto, dada por:

$$E_c = \frac{\left(4,5\ \text{kg}.\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\left(60\times10^{-3}\right)\text{kg}} \cong 168,8\ \text{joules}$$

b. Fazendo uso da relação entre momento linear e velocidade: $p = mv$, a velocidade, sendo nesse caso a única incógnita, pode ser determinada. Nesse caso, temos:

$$4,5\ \text{kg.m/s} = \left(60\times10^{-3}\ \text{kg}\right).v \Rightarrow v = 75\ \text{m/s}\left(270\ \text{km/h}\right).$$

13.3 O Potencial Escalar e a Energia Potencial

Quando um corpo interage com outro ou com outros, ele adquire energia. Essa forma de energia, inteiramente relacionada com as interações, depende da distância entre os objetos que interagem. Assim, essa forma de energia depende da posição do objeto. Essa dependência em relação à posição serviu de mote para conferir um nome a esse tipo de energia: energia potencial ou, analogamente, energia de posição. A palavra energia potencial foi cunhada, em 1853, por William Rankine.

Para entender a energia potencial, consideremos uma partícula puntiforme dotada de um atributo. Para efeito de ilustração, consideremos apenas dois tipos de atributos: a carga elétrica e a massa.

A presença de uma partícula puntiforme ou de um conjunto delas, dotada de qualquer um desses atributos, gera uma alteração nas propriedades do espaço ao seu redor. Dizemos que a partícula dá origem a um potencial. Assim, o potencial pode ser pensado como uma consequência tangível da presença de objetos dotados desse atributo. O potencial gerado, representado pela letra V, é função da distância do ponto onde se pretende determiná-lo, até onde se encontra a partícula. Escrevemos assim:

$$V = V(r) \tag{13.2}$$

O potencial é o campo escalar gerado por uma ou mais partículas. Como regra geral, podemos prever que ele tende a zero no limite em que a distância é muito grande, isto é:

$$\lim_{r\to\infty}\left(V(r)\right) \to 0 \tag{13.3}$$

ou seja, o efeito do atributo se reduz à medida que nos afastamos das causas que o geram.

Mais geralmente, escrevemos o potencial produzido no ponto P cujo vetor posição é $\vec{r}$, devido à existência de uma partícula localizada em outro ponto P' cujo vetor posição é $\vec{r}\,'$, como:

$$V(\vec{r}) = V\left(\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|\right) \tag{13.4}$$

E isso porque a distância entre as duas partículas é dada por:

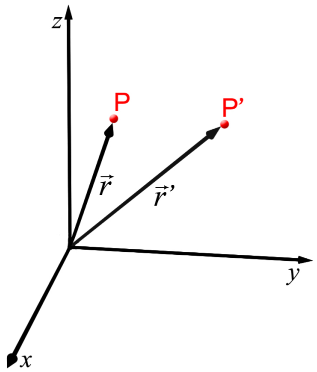

Figura 13.4: Uma particula no ponto *P'* produz um pontencial no ponto *P*.

$$d = \left|\vec{r} - \vec{r}'\right| \tag{13.5}$$

O potencial no ponto P cujo vetor posição é $\vec{r}$, produzido como resultado da existência de N partículas localizadas nos pontos P_i cujo vetor de posição da i-ésima partícula é $\vec{r}_i'$, é dado pela soma do potencial produzido individualmente por cada uma delas. Ou seja:

$$V\left(\vec{r}\right) = \sum_{i=1}^{N} V\left(\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|\right) \tag{13.6}$$

Ou, de outra forma inteiramente equivalente:

$$V = \sum_{i=1}^{N} V\left(d_i\right) \tag{13.7}$$

onde d_i é a distância do ponto considerado até a i-ésima partícula.

A consequência do fato de que uma partícula dotada de massa ou carga produz, ao seu redor, um potencial é que outra partícula dotada do mesmo atributo adquire uma energia quando situada em qualquer ponto, ou seja, ela se energiza. Essa energia é conhecida como energia potencial. A energia potencial de uma partícula [representada por $U(\vec{r})$] é o produto do seu atributo vezes o potencial gerado pela outra ou pelas outras. Assim, a energia potencial de uma partícula no ponto P é dada pelo produto:

$$E_P = U\left(\vec{r}\right) = \text{atributo} \cdot V\left(\vec{r}\right) \tag{13.8}$$

Sejam (x, y, z) as coordenadas de uma partícula. Assim, pelo que foi dito acima, se ela interage com outras, haverá uma energia – a energia potencial E_P, que depende da sua posição (em geral, a posição relativa às demais), a qual escrevemos como:

$$E_P = U\left(x, y, z\right) \equiv U\left(\vec{r}\right) \tag{13.9}$$

À função do ponto U, que estabelece a energia decorrente da interação da partícula naquele ponto de coordenadas (x, y, z), denominamos função energia potencial ou, simplesmente, energia potencial.

Em se tratando da força gravitacional, a energia associada a ela recebe o nome de energia potencial gravitacional. A energia potencial associada às interações elétricas recebe o nome de energia potencial elétrica.

A energia potencial, assim como a energia cinética, é uma grandeza escalar.

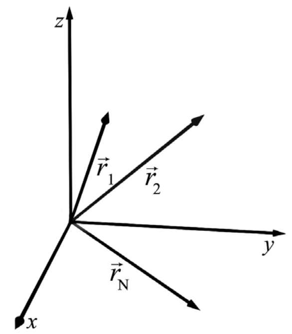

Figura 13.5: N partículas geram um potencial num ponto P. Uma partícula, aí localizada, interage com elas adquirindo assim uma energia potencial.

13.4 Potencial Gravitacional

Um dos resultados fundamentais da gravitação é o de que o potencial gravitacional produzido no ponto cujo vetor posição é $\vec{r}$, como resultado da existência de uma partícula puntiforme de massa M localizada no ponto cujo vetor de posição é $\vec{r}'$, é dada por:

$$V\left(\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|\right) = -\frac{GM}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} \tag{13.10}$$

onde G é a constante da gravitação universal. Observe que a distância entre elas é dada por:

$$d = \left|\vec{r}-\vec{r}'\right| \tag{13.11}$$

O potencial produzido no ponto cujo vetor posição é $\vec{r}$, devido à existência de N partículas puntiformes cuja massa da i-ésima é M_i, localizadas nos pontos cujo vetor de posição da i-ésima partícula é $\vec{r}_i'$, é dado pela soma do potencial produzido individualmente por cada uma delas. Ou seja:

$$V(\vec{r}) = -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{GM_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|}\right) \tag{13.12}$$

ou, ainda:

$$V(\vec{r}) = -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{GM_i}{d_i}\right) \tag{13.13}$$

onde d_i é a distância do ponto considerado até a i-ésima partícula.

- Exemplo 3:

As circunferências da **Figura 13.6** são concêntricas com o centro da Terra e pertencem a um plano que passa pelo centro da mesma.
Sendo $M_T \cong 6 \times 10^{24}$ kg e $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg², respectivamente, a massa da Terra e a Constante Universal da Gravitação. Determinar o potencial gravitacional gerado pela massa da Terra:

a. no ponto A da circunferência concêntrica com a Terra e que tenha raio $R = 300.000$ km.

b. nos pontos B, C, D, todos pertencentes à circunferência que contém o ponto A mencionado no item (a).

c. num ponto da órbita de Netuno, distante da Terra, em média, 29 UA da Terra. (1 UA = 150 milhões de km = 150×10^9 m)

d. num ponto H situado a 200 km acima da superfície da Terra.

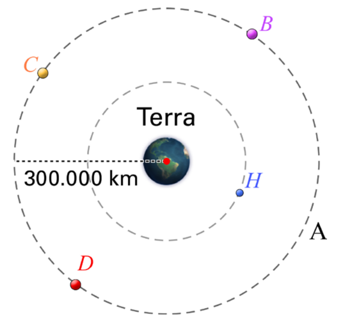

Figura 13.6: Potenciais a diferentes altitudes. O potencial gravitacional de um ponto é inversamente proporcional a sua distância ao centro da Terra.

→ Resolução

a. Potencial no ponto A

Vamos aplicar as definições expressas pelas equações **13.10** e **13.12**; para isso adotemos um sistema de referência no plano das circunferências, posicionando o centro da Terra e o ponto A; $\vec{r}$ = vetor posição do ponto A e $\vec{r}'$ = vetor posição do centro da Terra.

De acordo com a expressão **13.12**, o módulo do vetor diferença $|\vec{r} - \vec{r}'| = d$ é a distância do ponto A ao centro da Terra.

O potencial gravitacional gerado pela massa da Terra no ponto A é dado pela expressão:

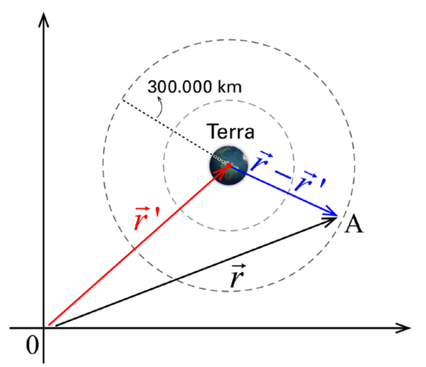

Figura 13.7: Vetores associados ao centro da Terra e ao ponto A.

$$V(A) = V(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{GM_{\text{Terra}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{GM_{\text{Terra}}}{d}$$

Substituindo na expressão acima $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ (N.m²/kg²); $d = 300.000$ km $= 3 \times 10^8$ m (raio da circunferência que passa por A e cujo centro coincide com o centro da Terra) e $M_{\text{Terra}} = 6 \times 10^{24}$ kg, o potencial gravitacional no ponto A será:

$$V(A) = -\frac{(6{,}67 \times 10^{-11})(6 \times 10^{24})}{3 \times 10^8} \frac{(\text{N.m}^2/\text{kg}^2)(\text{kg})}{\text{m}} \cong -13{,}3 \times 10^5 \,(\text{N.m/kg})$$

como N.m = joule, unidade de energia, a unidade de potencial gravitacional é, no SI, (J/kg). Logo, o potencial gravitacional no ponto A é:

$$V(A) = -13,3 \times 10^5 \text{ J/kg}$$

b. Potencial nos pontos B, C, D

O potencial gravitacional no ponto A pode ser calculado por meio da relação determinada pela equação **13.10**, onde a letra d representa a distância entre o centro da massa geradora do potencial (no caso, a Terra) e o ponto A. Se os pontos A, B, C, D, etc. pertencerem à mesma circunferência de raio R = 300.000 km, então, a distância desses pontos ao centro da Terra é $d = R$ e, portanto, eles têm o mesmo valor do potencial gravitacional:

$$V(B) = V(C) = V(D) = V(A) = -\frac{GM_{\text{Terra}}}{d} = -13,3 \times 10^5 \text{ J/kg.}$$

Conclusão: Pontos equidistantes do centro da Terra têm o mesmo potencial gravitacional.

c. Potencial na posição do planeta Netuno devido à Massa da Terra

$$V(\text{Netuno}) = -\frac{GM_{\text{Terra}}}{(29 \text{ UA})} = -\frac{40 \times 10^{13}}{29 \times 150 \times 10^9} \cong -92 \text{ J/kg!}$$

O potencial gerado por uma massa é inversamente proporcional à distância até o centro dela (se ela for esférica); logo, conforme d aumenta, o potencial V diminui. O potencial tende a zero quando d tende a infinito, ou seja, $\lim_{d\to\infty} V = 0$.

d. Potencial num ponto de altura H

O ponto H está a 200 km acima da superfície; portanto, a sua distância até o centro da Terra é d = raio da Terra + 200 km = 6.378 km + 200 km = 6.578 km = $6,578 \times 10^6$ m. Logo,

$$V(H) = -\frac{GM_{\text{Terra}}}{(\text{raio da Terra} + 200 \text{ km})} = -\frac{40 \times 10^{13}}{6,578 \times 10^8} = -61 \times 10^6 \text{ J/kg.}$$

13.5 Energia potencial gravitacional

A energia potencial gravitacional é aquela que resulta da interação gravitacional de uma partícula de massa *m* com outras dotadas de massa. Por exemplo, no caso da interação gravitacional dessa partícula com outro corpo de forma esférica, como a Terra, de massa *M*, pode-se mostrar que a expressão para essa energia potencial é:

$$U(r) = -m\frac{MG}{r} \qquad 13.16$$

onde admitimos, na expressão **13.16**, um referencial localizado no corpo de massa *M*. Sendo assim, *r* é o módulo do vetor de posição da partícula de massa *m* (a distância até o centro da Terra), e *G* é a constante da gravitação Universal. O sinal menos indica que a força gravitacional é atrativa.

A energia potencial depende da distância entre os objetos. No caso de um deles ser um objeto esférico, consideramos a distância entre o objeto e o centro do objeto esférico.

Assim, se duas partículas de massas m_1 e m_2 estiverem em posições caracterizadas pelos vetores de posição $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, respectivamente, a energia potencial de interação entre elas é dada por:

$$U = -\frac{m_1 m_2 G}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|} \qquad 13.17$$

Essa energia potencial gravitacional é compartilhada pelas duas partículas. Se uma partícula de massa *m* localizada em $\vec{r}$ estiver interagindo com *N* outras localizadas em diversos pontos, cujos vetores de posição são determinados pelos vetores $\vec{r}_i$, a energia potencial associada a essa interação é dada por:

$$U(\vec{r}) = -m\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{GM_i}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|}\right) = -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{GmM_i}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|}\right) \qquad 13.18$$

- Exemplo 4:

O telescópio Hubble tem massa $m \cong 11.000$ kg e uma órbita circular cujo raio, contado a partir do centro da Terra, mede 7.000 km. Considerar $GM_{\text{Terra}} = 40 \times 10^{13}$ (N.m²/kg). Qual a energia potencial do telescópio Hubble?

Figura 13.8: O telescópio Hubble. / Fonte: Hubblesite.org

→ Resolução

A massa da Terra (M_{Terra}) produz, num ponto a uma distância r do seu centro, um potencial gravitacional dado pela equação **13.16**. No caso em apreço, o atributo em jogo é a massa do telescópio Hubble, pois se trata de Energia Potencial Gravitacional (caso se tratasse de Energia Potencial Eletrostática, o atributo em jogo seria a "carga elétrica"). Portanto:

$$E_p = -m_{\text{Hubble}} \cdot \frac{GM_{\text{Terra}}}{r} \tag{13.19}$$

Donde obtemos:

$$E_p = U(r) = -\left(11\times10^3\,\text{kg}\right)\frac{40\times10^{13}}{7\times10^6}\left(\text{N.m}^2/\text{kg}\right)/\text{m}(r) \cong -63\times10^{10}\,\text{J}$$

$$E_p = U(r) = -63\times10^{10}\,\text{J} = -630\times10^9\,\text{J} = -630 \text{ bilhões de joule}$$

O sinal negativo indica que o Hubble se encontra "ligado" à massa que produz o potencial gravitacional, ou seja, para "atirar" o Hubble em direção ao infinito (longe do alcance do campo da Terra), seria necessário – no mínimo – uma energia extra de + 630 bilhões de joules.

- Exemplo 5:

A **Figura 13.9** ilustra duas circunferências, uma de raio 300.000 km concêntrica com a Terra e outra de raio 100.000 km concêntrica com a Lua. Elas pertencem a um plano que contém os centros dos dois astros.

a. Qual o potencial gravitacional resultante no ponto A comum às duas circunferências?

b. Qual a energia potencial gravitacional de uma nave espacial com massa m = 12.000 kg nesse ponto?

Considere (GM_{Terra}) = 40 × 10^{13} N.m²/kg e (GM_{Lua}) = 49 × 10^{11} N.m²/kg.

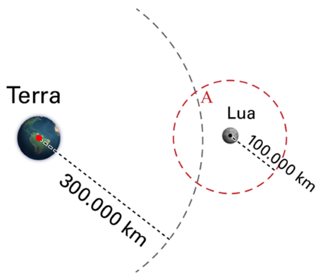

Figura 13.9: Superfícies concêntricas à Lua e à Terra.

→ Resolução

a. Potencial gravitacional resultante

Estamos diante de um exemplo de superposição de potenciais gravitacionais num ponto (na verdade, isso vale para qualquer ponto do espaço). No ponto A (vide **Figura 13.10**), temos o resultado de um potencial gerado pela massa da Terra e outro pela massa da Lua, conforme as equações **13.8** e **13.9**.

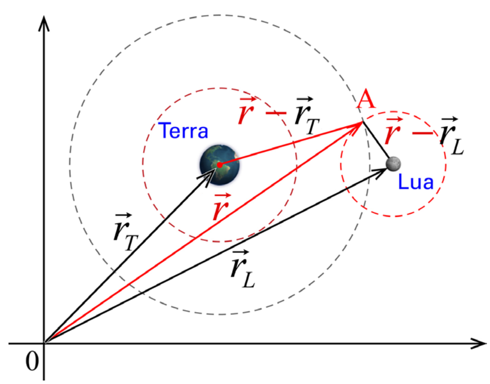

Figura 13.10: O potencial no ponto A é a soma dos potenciais gerados tanto pela Lua quanto pela Terra.

A distância do centro da Terra até o ponto A é $d_{AT} = |\vec{r} - \vec{r}_T| = 3\times10^8\,\mathrm{m}$; e a distância do centro da Lua até o ponto A é $d_{AL} = |\vec{r} - \vec{r}_L| = 1\times10^8\,\mathrm{m}$. Assim, a soma dos dois potenciais é dada por:

$$V(A) = \left(-\frac{GM_{\text{Terra}}}{d_{AT}}\right) + \left(-\frac{GM_{\text{Lua}}}{d_{AL}}\right)$$

Explicitamente, temos:

$$V(A) = -\frac{40\times10^{13}\,\mathrm{N.m^2/kg}}{3\times10^8\,\mathrm{m}} - \frac{49\times10^{11}\,\mathrm{N.m^2/kg}}{1\times10^8\,\mathrm{m}}$$

ou seja:

$$V(A) = \left(-13{,}3\times10^5\right) + \left(-0{,}49\times10^5\right) = -13{,}8\times10^5\,(\mathrm{J/kg})$$

b. Energia potencial da nave

Uma nave de massa m = 12.000 kg terá, no ponto A, uma energia potencial gravitacional:

$$U(A) = m\cdot V(A) = \left[12\times10^3\,\mathrm{kg}\right]\left[-13{,}8\times10^5\,(\mathrm{J/kg})\right] \cong -165{,}6\times10^8\,\mathrm{J}$$

13.6 Potencial eletrostático

Uma partícula puntiforme de carga Q, portanto, carregada eletricamente, produz uma alteração no espaço ao seu redor. Essa alteração é caracterizada pelo potencial eletrostático que ela produz.

Admitindo-se que essa partícula esteja na origem, o potencial eletrostático produzido nos vários pontos do espaço que estejam a uma distância r dessa partícula, é dado, no sistema MKS, por:

$$V(|\vec{r}|) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \qquad 13.20$$

O potencial eletrostático produzido num ponto do espaço - o ponto P -, cujo vetor posição é $\vec{r}$, como resultado da existência de uma partícula puntiforme de carga Q localizada no ponto cujo vetor de posição é $\vec{r}'$, é dado por:

$$V(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \qquad 13.21$$

Observe que a distância d entre o ponto P e a carga Q é:

$$d = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad 13.22$$

O potencial produzido num ponto arbitrário do espaço caracterizado pelo vetor posição $\vec{r}$, como resultado da existência de N partículas puntiformes cuja carga elétrica da i-ésima delas é Q_i, localizadas nos pontos tais que o vetor de posição da i-ésima partícula é $\vec{r}_i'$, é dado pela soma do potencial produzido individualmente por cada uma delas. Ou seja:

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) \quad 13.23$$

ou, ainda:

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{d_i} \right) \quad 13.24$$

onde d_i é a distância do ponto considerado até a i-ésima partícula.

- Exemplo 6:

Um ponto P, no vácuo, dista d = 20 cm de uma carga elétrica pontual $Q = 8 \times 10^{-3}$ C (coulomb).

a. Qual o potencial eletrostático V gerado pela carga Q no ponto P?

b. O que mudaria se a carga Q fosse negativa?

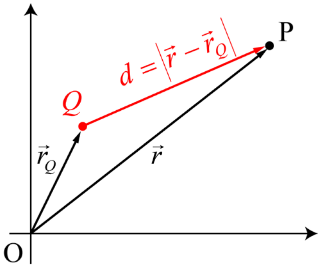

Figura 13.11

→ Resolução

a. Potencial gerado pela carga elétrica

A equação **13.21** define o potencial eletrostático $V(\vec{r})$ gerado por uma carga elétrica Q num ponto P, cujo vetor posição é $\vec{r}$, como:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{d} \quad 13.25$$

Lembrando que a permissividade do vácuo é tal que:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 \left[\text{N.m}^2/\text{C}^2 \right] \quad 13.26$$

substituindo-se os valores fornecidos, obtemos:

$$V(\vec{r}) = V_P = \left[9\times10^9\left[\mathrm{N.m^2/C^2}\right]\right]\left[\frac{8\times10^{-3}\,\mathrm{C}}{0{,}2\ \mathrm{m}}\right] = 360\times10^6\left[\mathrm{N.m/C}\right)$$

A unidade volt = [N.m/C] = J/C tem símbolo: V, em homenagem a Alessandro Volta.
Logo, quando expresso em volts, o potencial eletrostático no ponto P é:

$$V_P = 360\times10^6\,\mathrm{volt} = 360\ \mathrm{MV}\left(\mathrm{M} = \mathrm{mega} = 10^6\right)$$

b. Mudança no sinal da carga

Se $Q = -9\times10^{-3}$ C, o potencial eletrostático mudaria de sinal, ou seja, $V_p = -360\times10^6$ volts $= -360$ MV.

13.7 Energia Potencial Eletrostática

Se duas partículas de cargas Q_1 e Q_2 estiverem em posições caracterizadas pelos vetores de posição $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, respectivamente, a energia potencial eletrostática, de interação entre elas, é dada por:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \qquad 13.27$$

Figura 13.12: Interação eletrostática entre as várias partes podem levar a efeitos visuais surpreendentes.

Essa energia potencial eletrostática é compartilhada pelas duas partículas. A energia será positiva se as cargas elétricas tiverem o mesmo sinal (nesse caso, as forças são repulsivas), ou quando as cargas tiverem sinal oposto (as forças são atrativas) a energia será negativa.

Se uma partícula de massa Q localizada em $\vec{r}$ estiver interagindo com N outras partículas carregadas, localizadas em diversos pontos cujos vetores de posição são determinados pelos vetores $\vec{r}_i$, a energia potencial associada a essa interação é dada por:

$$U(\vec{r}) = Q\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{QQ_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}\right) \qquad 13.28$$

A partir dessa expressão, podemos deduzir a energia total associada a interações entre cargas elétricas. Obtemos, para as interações duas a duas entre elas:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}^{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_jQ_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}\right) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{j\neq i}^{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{Q_jQ_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}\right) \quad 13.29$$

- Exemplo 7:

Três cargas elétricas pontuais $Q_A = 20\ \mu C$, $Q_B = -40\ \mu C$ e $Q_C = -30\ \mu C$ [$\mu C = 10^{-6}$ C] encontram-se, respectivamente, nos pontos A, B e C, conforme indicados na **Figura 13.13**. O sistema encontra-se no vácuo ($\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$ N.m²/C²).

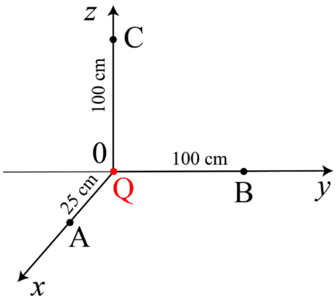

Figura 13.13: Energia potencial da carga na origem do referencial.

Adotando-se o referencial cartesiano da **Figura 3.13**, qual é a energia potencial eletrostática de uma carga pontual $Q = 5\ \mu C$ situada na origem do referencial (o ponto 0)?

→ Resolução

Temos duas alternativas para encontrar a resposta.

Na primeira, determinamos o potencial eletrostático resultante na origem do referencial $V(0)$ e, a seguir, determinamos a energia potencial eletrostática da carga elétrica Q. Assim, de acordo com **13.23**, o potencial na origem se escreve, em função das distâncias das cargas até a origem, como:

$$V(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_A}{d_A} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_B}{d_B} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_C}{d_C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_A}{0A} + \frac{Q_B}{0B} + \frac{Q_C}{0C}\right] \quad 13.30$$

Explicitamente temos, nesse caso:

$$V(0) = 9\times 10^9\left(\mathrm{N.m^2/C^2}\right)\left[\frac{20\mu}{0,25} + \frac{-40\mu}{1} + \frac{-30\mu}{1}\right](\mathrm{C/m})$$

$$V(0) = 9\times 10^9\left[\frac{20}{0,25} + \frac{-40}{1} + \frac{-30}{1}\right]\mu\,\mathrm{J/C}$$

$$V(0) = 9\times 10^9[80 - 40 - 30](10^{-6})\,\text{volt} = 90\times 10^3\,\text{volt} = 90\ \text{kV}.$$

$$V(0) = 90\ \text{kV} \equiv V(0,0,0)$$

Portanto, a energia potencial eletrostática da carga Q = 8 μC situada na origem será:

$$U(0) = Q \cdot V(0) = \left(8 \times 10^{-6}\,\text{C}\right)\left(90 \times 10^{3}\,\text{J/C}\right) = 720 \times 10^{-3}\,\text{J} = 720\ \text{milijoule}$$
$$U(0) = U(0,0,0) \equiv 0{,}720\ \text{J}$$

A segunda alternativa consiste em calcular a energia potencial eletrostática considerando a interação da carga Q com cada uma das demais e, a seguir, efetuar a soma algébrica. Assim:

$$\begin{aligned} U(0) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q \cdot Q_A}{dA} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q \cdot Q_B}{dB} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q \cdot Q_A}{dC} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q \cdot Q_A}{0A} + \frac{Q \cdot Q_B}{0B} + \frac{Q \cdot Q_A}{0C}\right] \\ &= 9 \times 10^{9}\left[\frac{(8\mu)(20\mu)}{0{,}25} + \frac{(8\mu)(-40\mu)}{1} + \frac{(8\mu)(-30\mu)}{1}\right]\text{J} \\ &= 9 \times 10^{9}\left[\frac{160}{0{,}25} + \frac{-320}{1} + \frac{-240}{1}\right]\mu^2\text{J} \\ &= 9 \times 10^{9}\left[640 - 320 - 240\right]10^{-12}\,\text{J} \end{aligned}$$

Donde inferimos que:

$$U(0) \equiv U(0,0,0) = 0{,}720\ \text{J}$$

13.8 Força e Energia potencial

Com o intuito de entender a relação entre forças e a energia potencial, consideraremos o caso unidimensional, ou seja, admitiremos que uma partícula esteja sob a ação de uma força que depende apenas de uma coordenada – a coordenada x e que ela só tenha essa componente. Escrevemos assim:

$$F_x = F_x(x) \quad F_y = 0 \quad F_z = 0 \Rightarrow m\frac{dv_x}{dt} = F_x(x) \quad m\frac{dv_y}{dt} = 0 \quad m\frac{dv_z}{dt} = 0 \qquad (13.31)$$

A dependência da força em relação à posição nos leva a prever que a energia potencial associada à tal interação depende apenas dessa coordenada. Assim, escrevemos a energia mecânica sob a forma:

$$E = \frac{m}{2}\left(v_x^{\,2} + v_y^{\,2} + v_z^{\,2}\right) + U\left(x\right) \qquad 13.32$$

Derivando a expressão acima com respeito ao tempo e levando-se em conta a conservação da energia, concluímos que:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow m\left(v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt}\right) + \frac{dU\left(x\right)}{dt} = 0 \qquad 13.33$$

Utilizando as expressões dadas na equação **13.33**, e lembrando a regra de derivação de uma função implícita, ou seja,

$$\frac{dU\left(x\left(t\right)\right)}{dt} = \frac{dU\left(x\left(t\right)\right)}{dx}\frac{dx}{dt} \equiv \frac{dU\left(x\right)}{dx}v_x \qquad 13.34$$

se substituirmos **13.34** em **13.33**, derivamos a seguinte relação entre a força e a energia potencial:

$$F_x(x) = -\frac{dU\left(x\right)}{dx} \qquad 13.35$$

Pode-se mostrar que, no caso de uma força geral, a relação, quando existir, será:

$$F_x(x,y,z) = -\frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial x} \quad F_y(x,y,z) = -\frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial y} \quad F_z(x,y,z) = -\frac{\partial U\left(x,y,z\right)}{\partial z} \qquad 13.36$$

onde as derivadas parciais $\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$ apenas indicam que devemos derivar a função U como se ela fosse dependente apenas de x, y ou z em cada um dos casos.

De uma forma simplificada, escrevemos:

$$\vec{F} \equiv -\vec{\nabla} U = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - -\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

A bem da verdade, deve-se frisar que nem todas as forças podem ser escritas como derivadas, ou seja, sob a forma **13.38**. Apenas as forças conservativas o são. Para as forças ditas dissipativas (de energia), não se pode falar em energia conservada.

- Exemplo 8:

A energia potencial de uma mola de constante elástica k varia com a sua deformação $x = L - L_0$, onde L é o comprimento da mola distendida e L_0 é o comprimento natural (mola relaxada), de acordo com a expressão:

$$U(x) = \frac{k}{2}x^2 \tag{13.37}$$

Determine a função associada à força elástica da mola.

→ Resolução

Para determinar a força elástica a partir da energia potencial elástica da mola, podemos usar a equação **13.35**. Assim:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{d\left[\frac{kx^2}{2}\right]}{dx} = -\frac{k}{2}\frac{d(x^2)}{dx} - 2\left[\frac{k}{2}\right]\cdot x^{(2-1)} = -k\cdot x$$

Donde concluímos que:

$$F(x) = -k\cdot x \tag{13.38}$$

O sinal negativo indica que a força é sempre oposta à coordenada da deformação, x.

Definem-se forças conservativas como aquelas que podem ser escritas sob a forma **13.36**. Só para tais forças podemos falar em energia associada à interação.

Da equação **13.36**, inferimos que, considerando-se um objeto puntiforme de massa m próximo de outro objeto esférico e colocando o ponto de origem do sistema de coordenadas no centro do objeto esférico (o centro da Terra, por exemplo), a força gravitacional pode ser escrita, em função do vetor de posição da partícula, $\vec{r}$, e de massa m, da seguinte forma:

$$\vec{F} = -mMG\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{13.39}$$

- Exemplo 09:

Considere um corpo de massa m num ponto à distância $r > R_{\text{Terra}}$ do centro da Terra.
Sendo a força gravitacional conservativa, determine a força gravitacional sobre a massa m a partir da sua energia potencial gravitacional quando no respectivo ponto.

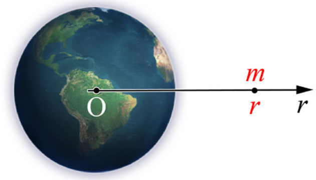

Figura 13.14: Qual o potencial e a energia potencial num ponto à distância r?

→ Resolução

O potencial gravitacional no ponto considerado é $V(r) = -\dfrac{GM_{\text{Terra}}}{r}$ e a energia potencial gravitacional da massa m, nesse ponto, é $U(r) = -m \cdot V(r) = -m\left[\dfrac{GM_{\text{Terra}}}{r}\right]$.

De acordo com a equação **13.17** (trocando, agora, x por r), temos:

$$F(r) = -\frac{dU(r)}{dr} = -\left[-G.m.M_{\text{Terra}}\right]\frac{d\left[\frac{1}{r}\right]}{dr} = \left[G.m.M_{\text{Terra}}\right]\frac{d\left[r^{-1}\right]}{dr}$$
$$= \left[G.m.M_{\text{Terra}}\right](-1)\cdot r^{(-1-1)} = -\left[G.m.M_{\text{Terra}}\right]\left[\frac{1}{r^2}\right]$$

E, portanto:

$$F(r) = -\frac{GmM_{\text{Terra}}}{r^2} \qquad 13.40$$

que é a expressão da força de interação gravitacional entre a massa da Terra e a massa m do corpo situado à distância r do centro da Terra.
Essa expressão é a correspondente escalar da expressão vetorial da equação **13.39** do texto. Mais geralmente, escrevemos:

$$\vec{F}(r) = -\frac{GmM_{\text{Terra}}}{r^2}(\vec{e}_r) \qquad 13.41$$

onde $\vec{e}_r = \dfrac{\vec{r}}{r}$ é o versor na direção radial, ou seja, no sentido positivo do vetor posição $\vec{r}$. Assim, substituindo $\vec{e}_r = \dfrac{\vec{r}}{r}$ temos $\vec{F}(r) = -\dfrac{GmM_{\text{Terra}}}{r^2}\left(\dfrac{\vec{r}}{r}\right) = -GmM_T\left(\dfrac{\vec{r}}{r^3}\right)$, conforme a equação **13.39**.

- Exemplo 10:

Consideremos agora a lei de Coulomb, que determina o comportamento da força entre duas cargas elétricas puntiformes, cujos valores são Q_1 e Q_2.

Adotamos, a seguir, o referencial com origem na partícula 1. De acordo com a lei de Coulomb, a força elétrica entre elas pode ser escrita, em função do vetor de posição da partícula de carga Q_2, da seguinte forma:

$$\vec{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \qquad 13.42$$

sendo que, na expressão acima, adotamos o sistema MKS ou o SI.

13.9 Energia Potencial: Forças Constantes

Para entender a estreita relação entre força e energia potencial, consideremos o caso de uma força constante. Escrevemos tal força sob a forma:

$$\vec{F}_0 = F_{0x}\vec{i} + F_{0y}\vec{j} + F_{0z}\vec{k} \qquad 13.43$$

onde F_{0x}, F_{0y} e F_{0z} são constantes associadas às componentes da força.

É muito fácil constatar, por meio de uma derivação muito simples, que a função definida por:

$$U(x, y, z) = -xF_{0x} - yF_{0y} - zF_{0z} + C \qquad 13.44$$

onde C é constante, é tal que a força constante dada em **13.43** pode ser derivada da energia potencial dada pela expressão **13.44**. Esta solução envolve uma constante arbitrária, C, a qual é determinada atribuindo-se o valor da energia potencial num determinado ponto.

Em geral, a energia potencial é determinada, de **13.36**, afora uma constante, ou seja, a energia potencial é definida à exceção de uma constante arbitrária. E essa constante pode ser determinada ao especificarmos que o valor da energia num determinado ponto se anula. Assim, se definirmos que a energia na origem assume o valor zero, determinamos o valor da constante C. Nesse caso:

$$U(0,0,0)=0 \quad \Rightarrow \quad C=0 \tag{13.45}$$

No caso do movimento dos projéteis, admitimos que a força gravitacional é constante. Assim, admitindo-se o eixo z indicando a direção acima da superfície terrestre, escrevemos:

$$\vec{F}_0 = -mg\vec{k} \tag{13.46}$$

E, portanto, a energia potencial gravitacional, admitindo-se movimentos próximos à superfície terrestre, é dada por:

$$\boxed{U(z)=mgz} \tag{13.47}$$

- Exemplo 11:

A energia potencial gravitacional de um objeto que se movimenta nas proximidades da superfície da Terra varia conforme a relação: $U(z) = 450.z$ (joules).

A partir da energia potencial $U(z) = 450.z$ (J) derivar o peso do objeto.

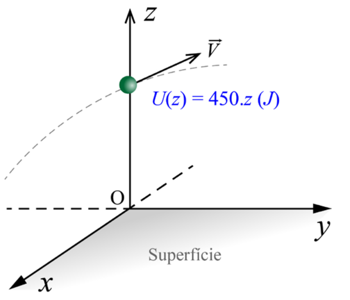

Figura 13.15: Energia potencial gravitacional é uma função da altura a partir da superfície.

→ Resolução

Utilizando-se da equação **13.47**, adaptada ao eixo z da **Figura 13.15**, e levando-se em conta o fato de a força gravitacional nas proximidades da superfície ser constante, obtém-se:

$$F_z = -\frac{dU(z)}{dz} = -\frac{d(450.z)}{dz} = -450(\text{newtons})$$

Por meio da equação **13.36**, e como $F_x = F_y = 0$, o peso do objeto na sua forma vetorial é assim expresso:

$$\vec{F} = \vec{p} = -450.\vec{k}$$

O sinal seria invertido se orientássemos o eixo z em direção ao centro da Terra. Qual é a massa do objeto?

13.10 A Conservação da Energia

Algumas transformações ocorrem com muita frequência. Outras são improváveis e outras ainda são, até o ponto que sabemos, impossíveis.

Alguém já ouviu falar de algum lago na região equatorial que, em pleno verão, repentinamente (sem mudança de temperatura), viesse a congelar? Imagine outro exemplo. Você já viu um lago, repentinamente, devolver à atmosfera os pingos da chuva que caem?

Esses dois exemplos acima parecem impossíveis, mas na realidade não o são. Eles apenas são improváveis, isto é, eles são viáveis em princípio, mas ocorreriam com uma probabilidade tão baixa que, para efeito prático, é como se fossem impossíveis.

Agora, imaginemos um outro exemplo. Uma bola de bilhar em movimento colide com uma outra, que está parada. Imagine a possibilidade de que as duas bolas (as duas, note bem) se movimentem, depois da colisão, na direção oposta à da primeira, antes da colisão. Isto não é improvável, é impossível. Essa transformação é impossível porque viola uma regra básica da natureza, que é a conservação do momento linear.

Todas as transformações da natureza respeitam um certo conjunto de leis de conservação. Essas leis de conservação estipulam que, em todas as transformações (processos físicos ou químicos), algumas grandezas físicas são sempre conservadas. Isso quer dizer que, se computarmos o valor dessas grandezas antes e depois da transformação, esse valor será o mesmo. Apresentaremos, a seguir, duas leis de conservação da natureza. As leis de conservação são tidas como leis universais e independentes do tipo de transformação.

A quantidade de energia depois de uma transformação é sempre igual à quantidade de energia anterior à transformação. Ao considerarmos a energia de um sistema físico, devemos contabilizar as massas dos constituintes. E isso porque, de acordo com Einstein, as massas têm um equivalente em energia ($E = mc^2$). Uma das consequências disso é a de que, na natureza, nada se cria nada se perde, tudo se transforma, ou seja, não se pode ter algo que surja do nada. Esse algo tem massa e, portanto, tem energia. O mesmo ocorre com grandes aglomerados de partículas como a matéria.

A ideia de conservação da energia nasceu com Leibniz. Ele acreditava que a *vis viva* seria conservada. A conservação da energia, hoje aceita como um principio básico das ciências, pode ser entendida como resultado da homogeneidade do tempo.

Para explicar o fato de que os objetos perdem velocidade devido ao atrito, e como atrito gera calor, ele desenvolveu uma teoria para o calor. Este seria associado ao movimento aleatório dos constituintes da matéria.

13.11 Energia mecânica e sua conservação

Existe um número apreciável de formas de energia. Neste tópico, estamos estudando a Energia Mecânica. Ela é composta de duas formas: a Energia Cinética e a Energia Potencial. Assim, a energia mecânica é dada por:

$$E = E_c + E_p = \frac{m\vec{v}^2}{2} + U(\vec{r}) \qquad 13.48$$

Existe uma classe de fenômenos para os quais a soma das duas energias se conserva. Nesse caso, uma forma de energia é convertida em outra. Em geral, isso ocorre, mas desde que levemos em conta todas as formas de energia.

Tendo em vista que a energia mecânica é conservada, é de se esperar que, ao longo do movimento no qual ocorrem mudanças de posição, uma forma de energia se converta, continuamente, em outra forma de energia.

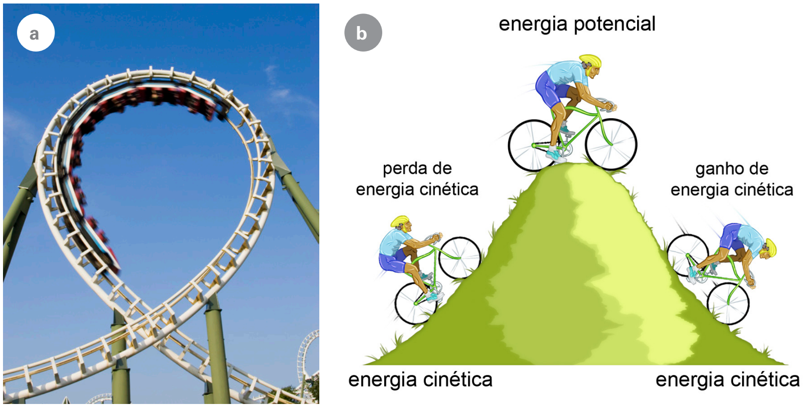

Figura 13.16: Alguns usos práticos da conservação de energia / Fonte (a): Thinkstock

Quando atiramos uma pedra para o alto, imprimimos a ela uma energia cinética, a qual irá se reduzindo paulatinamente até que atinja o ponto mais alto. Nesse ponto de altura máxima, a energia cinética será mínima. Consequentemente, a energia cinética impressa ao corpo foi parcialmente convertida em energia potencial. A partir do momento em que a pedra inicia o movimento descendente, começa a fase do movimento na qual existe conversão de energia potencial em energia cinética. Isso pode ser inferido a partir da expressão da energia de uma partícula sujeita a um campo gravitacional constante. Nesse caso, a energia mecânica é dada pela expressão:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz \qquad 13.49$$

O exemplo acima não é um caso particular. Em geral, vale a premissa de que, nos pontos para os quais a energia potencial é mínima, a energia cinética será máxima. E vice-versa. Esse é o princípio de funcionamento das montanhas russas num parque de diversões.

- Exemplo 12

A **Figura 13.17** ilustra uma jaca de 7 kg ainda presa ao galho.

a. Qual a energia mecânica associada à jaca presa ao galho? Adotar g = 10 N/kg.

b. Se a jaca atinge o solo com velocidade escalar v = 19,5 m/s, houve conservação da energia mecânica da jaca durante a queda?

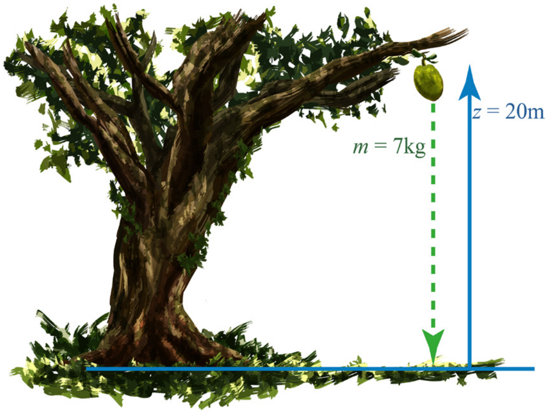

Figura 13.17: Qual a velocidade do fruto ao cair?

→ Resolução

a. Energia mecânica

Conforme as equações **13.48** e **13.49**, a energia mecânica da jaca, quando presa ao galho, é:

$$E_1 = E_{c1} + U(z_1) = \frac{1}{2}.m.v_1^{\,2} + m.g.z_1$$

Enquanto presa no galho, a sua velocidade é nula. Logo, a sua energia cinética é E_{c1} = 0. Mas, no alto do galho, onde a sua coordenada é z_1 = 20 m, a energia potencial da jaca é U(7 m) = (7 kg)(10 N/kg)(20 m) = 1.400 N.m = 1.400 J. Portanto, presa onde estava, a sua energia mecânica é:

$$E_1 = 0 + 1.400 \text{ J} = 1.400 \text{ J}.$$

b. Energia dissipada durante a queda

Vamos calcular a energia cinética e a energia potencial gravitacional da jaca quando ela atinge o solo:

- $E_{c2} = \frac{1}{2}.m.v_2^{\,2} = \frac{1}{2}.(7\text{ kg}).(18\text{ m/s})^2 \cong 1.331\text{ J}$
- $U(z=0) = (7\text{ kg})(10\text{ N/kg})(0) = 0$

Então, a energia mecânica da jaca, ao atingir o solo, é:

$$E_2 = 1.331J + 0 = 1.331J$$

Na queda, desde a posição (1) quando se solta do galho até a posição (2) quando colide com o solo, a energia mecânica da jaca **não se conserva**, pois $E_1 > E_2$. A variação da energia mecânica durante a queda foi:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = (1.331 - 1.400) = -69\text{ J}$$

Dizemos que, durante a queda, houve dissipação de 69 J de energia mecânica, que se transformou, em parte, em energia térmica e, em parte, transferiu energia para o ar, movimentando-o quando da sua queda.

Após o choque, a jaca – aos cacos – entra em repouso. Considerando essa fase, a energia global que a jaca possui no alto do galho (1.400 J) dissipou-se integralmente.

- Exemplo 13

Na competição de salto com ski em Jogos de Inverno, os atletas partem do topo de um gigantesco plano inclinado, como o ilustrado na **Figura 13.18**. Os pontos B e C estão no mesmo nível, enquanto o ponto A está localizado a 120 m acima desse nível.

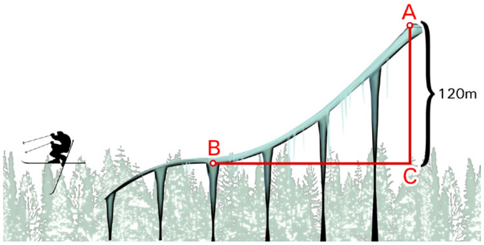

Figura 13.18: Salto com ski: com que velocidade o atleta atinge o solo?

Um atleta de massa 80 kg, partindo do repouso do ponto A, desce a plataforma com velocidade crescente; no ponto B, ele é lançado para o espaço, com velocidade escalar v.

Adote g = 10 N/kg = 10 m/s² e despreze o atrito (uma vez que ele é dissipativo). Levando-se em conta o atrito, a energia mecânica não seria conservada.

A partir dos dados acima, determine a velocidade v com que o atleta é lançado para o espaço.

→ Resolução

Sendo a energia conservada ocorre que: $E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}}$, ou seja,

$$\frac{m(v_A)^2}{2} + m.g.z_A = \frac{m(v_B)^2}{2} + m.g.z_B$$

Substituindo-se os valores dados, obtém-se:

$$\frac{80(0)^2}{2} + 80.10.130 = \frac{80.(v_B)^2}{2} + 80.10.0$$

donde,

$$v_B = 20\sqrt{6}\text{ m/s}$$

- Exemplo 14:

Um objeto de massa $m = 2$ kg é lançado, a partir do solo, verticalmente para cima com velocidade $v_0 = 20$ m/s.

a. Qual a altura máxima que o objeto atinge caso não ocorra a dissipação de energia mecânica?

b. Se, como resultado do atrito com o ar, 25% da energia cinética inicial do objeto for dissipada, qual é a altura atingida nesse caso? Considerar $g = 10$ m/s².

→ Resolução

a. Altura máxima sem dissipação da energia.

A altitude máxima atingida por uma pedra, a partir do conhecimento da sua velocidade inicial, pode ser determinada sem o conhecimento da solução da equação de movimento. Para pequenas altitudes, aquelas para as quais a altura é muito menor do que o raio da Terra (ou seja, $z \ll R$), podemos utilizar a expressão **13.49**.

De acordo com o enunciado, podemos aplicar a Lei da Conservação da Energia Mecânica, ou seja:

$$E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}}$$

De acordo com os dados, temos:

$$\frac{m(v_0)^2}{2} + m.g.z_0 = \frac{m\left(v_{z_{\max}}\right)^2}{2} + m.g.z_{\max}$$

Quando o objeto atinge a altura máxima, a sua velocidade na direção vertical é nula, ou seja, $v_{z\max} = 0$. Assim,

$$\frac{2(20)^2}{2} + 2.10.(0) = \frac{2(0)^2}{2} + 2.10.z_{\max}$$

o que implica que

$$z_{\max} = 20\text{ m}$$

b. Altura máxima com dissipação da energia.

A energia cinética quando do lançamento do objeto é $Ec_0 = \dfrac{m(v_0)^2}{2} = \dfrac{2(20)^2}{2} = 400$ J. Se 25% dessa energia for dissipada, restará para o objeto uma energia $E_{c\ \text{disponível}} = 400 - (0{,}25)400 = 300$ J. Essa energia se transformará em energia potencial gravitacional e o objeto atingirá uma altura z'_{max} que assim pode ser prevista: $300 = m.g.z'_{max}$, ou seja, $z'_{max} = 300/2 \times 10 = 15$ metros.

Com a dissipação de 25% da energia inicial, o objeto alcançará uma altura de 15 m (em vez de 20 m, que é o resultado quando não consideramos a dissipação da energia mecânica).

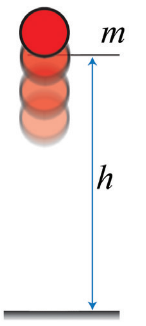

Figura 13.19: Lançamento na vertical: com perda de energia cinética ao subir e ganho de energia cinética ao descer.

13.12 Lei da Conservação de Energia para grandes altitudes

No caso de movimentos de objetos a grandes altitudes, devemos fazer uso da expressão da energia em função da distância r até o centro da Terra. Utilizamos, portanto, a expressão **13.16** para a energia potencial, daí resultando que a energia mecânica associada à energia potencial gravitacional se escreve como:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - m\frac{MG}{r} \qquad 13.50$$

onde M é a massa da Terra e G é a constante da gravitação universal.

A expressão acima tem muitas utilidades como, por exemplo, determinar a velocidade de escape de um projétil na superfície da Terra.

- Exemplo 15

A **Figura 13.20** esquematiza o perfil de uma miniatura de montanha russa. Um carrinho de massa m = 50 kg é solto do ponto 1 (v_1 = 0); ele desliza ao longo do trilho até atingir o plano horizontal. No ponto 4 a sua velocidade escalar é v_4 = 6 m/s.

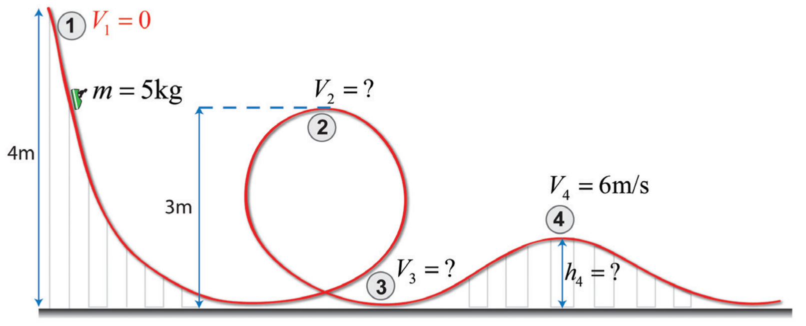

Figura 13.20: Com base na conservação da energia mecânica, podemos prever a velocidade nos pontos 2 e 3, bem como prever a altura no ponto 4.

Considerando nulas as forças de atrito sobre o carrinho e g = 10 N/kg (ou 10 m/s²) o módulo do campo gravitacional reinante no local do evento, determinar:

a. as velocidades quando o carrinho passar pelos pontos 2 e 3;

b. a altura h_4.

→ Resolução

Trata-se de um evento no qual a energia mecânica do carrinho é conservada; durante o trajeto a energia cinética e a energia potencial gravitacional do carrinho transformam-se, porém, a sua soma permanece invariável, ou seja,

$$E = E_C + U_{\text{grav}} = \left(\frac{1}{2}\right) m \cdot v^2 + mgh = \text{constante}$$

com $z = h$.

Se E = constante, qual o seu valor? Para determiná-lo vamos considerar o ponto inicial 1 onde v_1 = 0 e h_1 = 4 m. Substituindo os valores na equação acima, temos:

$$E_1 = \left(\frac{1}{2}\right)(50\text{ kg})(0)^2 + (50\text{ kg})(10\text{ N/kg})(4\text{ m}) = 2000\text{ N.m} = 2000\text{ joules} = 2000\text{ J.}$$

Portanto, em qualquer ponto da trajetória do carrinho, a sua energia mecânica será E = 2000 J.

a. Determinação de v_2 e v_3.

Para determinar v_2 devemos considerar o ponto 2 onde h_2 = 3 m a conservação da energia mecânica do carrinho; deste modo, no ponto 2 a sua energia mecânica é E = 2000 J. Podemos escrever:

$$\left(\frac{1}{2}\right)m\left(v_2\right)^2+\left(m\right)\left(g\right)\left(h_2\right)=E_2=2000\text{ J.}$$

Substituindo os valores conhecidos, em unidades do SI, tem-se: $25(v_2)^2 + 1500 = 2000$ donde $v_2 = \mp\sqrt{20}=\mp2\sqrt{5}$ m/s. Como o movimento é progressivo a velocidade que nós interessa é $v_2=2\sqrt{5}$ m/s.

Para a determinação de v_3 consideramos o ponto 3 onde $h_3 = 0$ e a energia mecânica do carrinho como $E_3 = E$ = 2000 J. Procedimentos análogos nos leva a $v_3 = \sqrt{80}=4\sqrt{5}$ m/s.

b. Determinação de h_4.

A energia mecânica do carrinho do carrinho no ponto 4 é E = 2000 J. Portanto, para este ponto, fundamentado na conservação da energia mecânica, escrevemos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)m\left(v_4\right)^2+mgh_4=2000$$

Substituindo v_4 = 6 m/s tem-se: $\left(\frac{1}{2}\right)50\left(6\right)^2+\left(50\right)\left(10\right)\left(h_4\right)=2000$ donde h_4 = 2,2 m.

Quando analisamos o movimento dos projéteis que se movem a pequenas distâncias sobre a superfície da Terra, podemos fazer uso da expressão aproximada **13.49**. Quando não for esse o caso, devemos utilizar a expressão **13.50**.

No caso, por exemplo, do movimento dos planetas, dos cometas, dos asteroides e mesmo de foguetes atingindo grandes altitudes, é essencial o uso da expressão **13.50**.

- Exemplo 16

No exemplo 4 destacamos o telescópio Hubble; a sua massa é $m \cong$ 11.000 kg e sua orbita, aproximadamente circular, de raio $r \cong$ 7.000 km, medido a partir do centro da Terra. Considerando que o seu período é T = 97 minutos , qual a sua energia mecânica? Dado: $GM_{\text{Terra}} = 40 \times 10^{13}$ (N.m²/kg).

→ Resolução

Como se trata de movimento de um corpo muito distante da superfície da Terra, a energia potencial gravitacional é $U = -m[GM_{\text{Terra}}]/r$. Portanto, a energia mecânica do Hubble deve ser determinada mediante a expressão **13.50**, ou seja,

$$E = \left(\frac{1}{2}\right)m \cdot v^2 - m\frac{GM_{\text{Terra}}}{r}$$

Logo, a determinação da energia mecânica exige o conhecimento da velocidade orbital v do Hubble. Esta pode ser determinada dividindo-se o espaço percorrido ($\Delta s = 2\pi r$) pelo período do movimento ($\Delta t = T = 96{,}9$ minutos $= 5.814$ s) que corresponde à duração de uma volta ao redor da Terra. Assim:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{6{,}28 \times 7 \times 10^6}{5.814} = 7.561 \text{ m/s}$$

Portanto:

$$E = \left(\frac{1}{2}\right)\left(11 \times 10^3\right)\left(7.561\right)^2 - \left(11 \times 10^3\right)\frac{40 \times 10^{13}}{7 \times 10^6}$$
$$= 31{,}44 \times 10^{10} - 62{,}86 \times 10^{10} = -31{,}42 \times 10^{10} \text{ joules.}$$

Observação: em módulo $E_{C\,\text{sat}} = ½\, U_{\text{sat}} = (1/2)\,(mGM_{\text{Terra}})/r$ quando o satélite tem órbita circular de raio r (em relação ao centro da Terra). Este fato será mostrado em texto posterior.

13.13 Energia no Movimento Harmônico Simples

A energia potencial associada a uma força elástica é dada por:

$$E_p = \frac{kx^2}{2} \qquad 13.51$$

Utilizando a expressão **11.13**, vemos que a energia potencial varia com o tempo de acordo com a expressão:

$$E_p = \frac{kA^2}{2}\cos^2\left(\omega t + \varphi_0\right). \tag{13.52}$$

A energia cinética, dada por:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} \tag{13.53}$$

também varia com o tempo. Utilizando a equação **11.27**, vemos que a dependência da energia cinética em relação ao tempo é dada por:

$$E_c = \frac{mA^2\omega^2}{2}\text{sen}^2\left(\omega t + \varphi_0\right) = \frac{kA^2}{2}\text{sen}^2\left(\omega t + \varphi_0\right), \tag{13.54}$$

onde, na expressão acima, utilizamos a relação **11.16**.

A soma da energia cinética com a energia potencial nos dá a energia mecânica (E). Nesse caso, escrevemos:

$$E = E_c + E_p = \frac{mv^2}{2} + kx^2 \tag{13.55}$$

Sabemos que a energia mecânica se conserva no movimento. Podemos verificar isso explicitamente somando as expressões **13.52** e **13.54**. Obtemos:

$$E = E_c + E_p = \frac{kA^2}{2}\left[\text{sen}^2\left(\omega t + \varphi_0\right) + \cos^2\left(\omega t + \varphi_0\right)\right] \tag{13.56}$$

Sabemos que $\text{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$. Portanto, de **13.56** segue-se que a expressão da energia mecânica é:

$$E = E_c + E_p = \frac{kA^2}{2} \tag{13.57}$$

A **Figura 13.21** ilustra o que acontece com as várias formas de energia à medida que o tempo passa.

Observe que a energia cinética e a energia potencial variam de tal forma que a soma permanece constante.

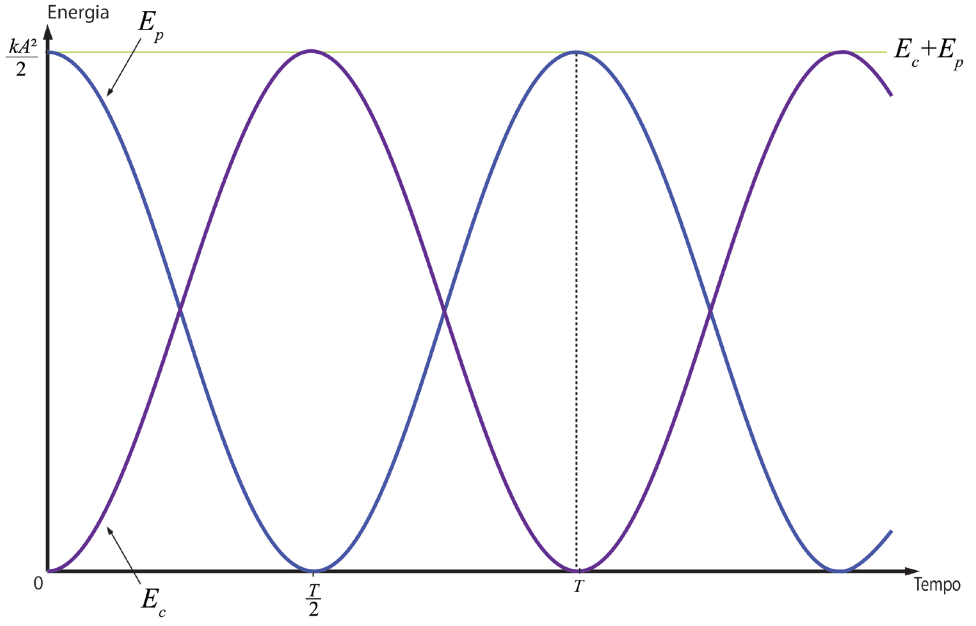

Figura 13.21: Gráfico das energias potencial e cinética em movimento MHS com o passar do tempo.

- Exemplo 17

Uma mola de constante elástica k = 4.000 N/m tem uma extremidade fixa numa parede e a outra no ponto A de um carrinho de massa m = 10 kg, que se pode movimentar, sem atrito, num trilho horizontal.

Conforme ilustra a **Figura 13.20**, o carrinho é empurrado contra a mola até que a coordenada do ponto A seja $x = -4$ cm, de onde é solto. A partir daí, o sistema passa a executar MHS. Considerando o sistema massa-mola, determinar:

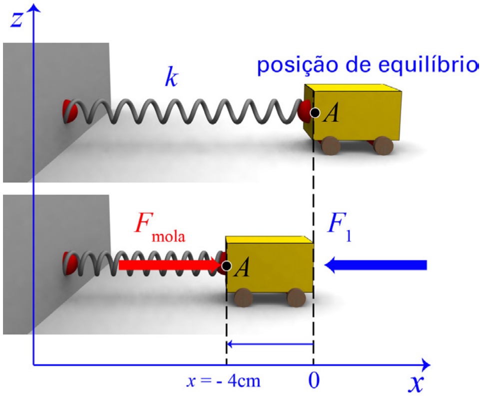

Figura 13.22: A energia potencial varia de ponto a ponto. Ela se anula na posição de equilíbrio.

a. a energia mecânica do sistema.

b. a velocidade do carrinho quando o ponto A do carrinho passar pela posição de equilíbrio $x = 0$.

→ Resolução

a. Energia mecânica do sistema massa-mola

Quando se trata de um sistema que inclui a mola, considerando-se o caso mais geral possível, a energia mecânica do sistema seria composta pela soma da energia cinética da massa, da sua energia potencial gravitacional e da energia potencial elástica da mola.

No entanto, nesse caso, a partícula de massa m não se move na direção vertical. Assim, temos, para o referencial adotado na figura, que $z = 0$. Então, antes de o carrinho ser solto, temos: $v_1 = 0$; $z_1 = 0$ e $x_1 = 4$ cm $= 4 \times 10^{-2}$ m. A partir desses dados, obtemos que sua energia inicial é:

$$E_1 = 0 + 0 + \frac{\left[4.000\dfrac{\text{N}}{\text{m}}\right]\left[4 \times 10^{-2}\,\text{m}\right]^2}{2} = 3{,}2\ \text{J}$$

Ou seja, a energia mecânica do sistema massa-mola é:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = 3{,}2\ \text{J}.$$

b. Velocidade no ponto de equilíbrio.

Nas condições anteriores, para duas posições quaisquer, 1 e 2, durante o MHS, podemos escrever: $E_1 = E_2$, ou seja,

$$\frac{mv_1^{\,2}}{2} + \frac{kx_1^{\,2}}{2} = \frac{mv_2^{\,2}}{2} + \frac{kx_2^{\,2}}{2} \qquad 13.58$$

Considerando a posição 2 como aquela em que o ponto A do carrinho passa pela posição de equilíbrio, temos:

Posição 1 : $v_1 = 0$; $x_1 = 4$ cm $= 4 \times 10^{-2}$ m

Posição 2 : $v_2 = ?$; $x_2 = 0$

Substituindo os valores acima em **13.58**, encontramos:

$$0 + 0 + \frac{k(x_1)^2}{2} = \frac{mv_2^{\,2}}{2} + 0 + 0$$

ou seja:

$$\frac{k(x_1)^2}{2} = \frac{mv_2^{\,2}}{2}$$

Esta relação implica que a energia potencial elástica (inicial) se transforma inicialmente em energia cinética do carrinho na posição de equilíbrio. Dessa relação, resulta:

$$v_2 = \sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}}(x_1) = \sqrt{\frac{4.000\,\mathrm{N/m}}{10\ \mathrm{kg}}}4 \times 10^{-2}{}_{m} = 0{,}8\,\mathrm{m/s}$$

O que ocorre após o carrinho passar pela posição de equilíbrio?

Na posição de equilíbrio, a energia mecânica do sistema massa-mola é constituída apenas de energia cinética (3,2 J); a partir dessa posição, a energia cinética diminui e a energia potencial da mola aumenta gradativamente na mesma proporção. No ponto de elongação máxima, a velocidade volta a ser (como no início do movimento) momentaneamente nula e a energia potencial da mola é, de novo, máxima. Tem início o movimento de volta ao ponto de equilíbrio. Em seguida, o objeto preso à massa volta ao ponto de origem, e assim por diante, o movimento é periódico.

Agora é sua vez...

Acesse o Ambiente Virtual de Aprendizagem e realize a(s) atividade(s) proposta(s).