# GRAVITAÇÃO 15

Gil da Costa Marques

# 15.1 A Interação Gravitacional

Do ponto de vista do Universo como nos é apresentado hoje, a interação gravitacional é a mais importante entre todas. Ela é a força aglutinadora do Universo e a única, entre as quatro interações conhecidas, que atinge cada ponto do Universo. Como tal, ela desempenha três papéis fundamentais.

O primeiro é o de procurar atrair toda a matéria do Universo. No que depender dessa força, o Universo se desaceleraria continuamente. Se o Universo fosse estático, como pensava Einstein, teríamos de encontrar uma força que contrabalançasse a força gravitacional, atraindo as várias partes do Universo. A solução encontrada por Einstein, de adicionar uma constante cosmológica, leva a uma força repulsiva entre as partes do Universo, força essa que – tudo leva a crer – parece existir, pois o Universo – no seu conjunto - encontra-se acelerado.

O segundo papel é o de juntar a matéria concentrando-a em aglomerados dos mais diversos tamanhos. Forma objetos compactos (típicas de objetos sólidos). Se dependêssemos apenas dessa força, ela concentraria toda a matéria num só ponto do espaço. No entanto, o processo de aglomeração acarreta a ação das demais forças. Essas forças atuam propiciando a estabilização do processo de encolhimento. Daí resulta que a matéria, ao longo do processo de aglutinação, passa por diversas fases, conforme a massa do objeto. Se a massa do objeto formado for muito grande, o processo de encolhimento aparentemente não chega a um fim.

Muitas vezes, ela não consegue concentrar toda a matéria numa pequena região do espaço. Pode, no entanto, manter a matéria orbitando em torno de um centro comum, como no caso do sistema solar, de aglomerados de estrelas dos mais variados tamanhos e de galáxias. Nesse caso, dizemos que a força gravitacional dá origem a sistemas de objetos compactos ligados entre si por meio da força gravitacional. Tais sistemas podem ser planetários, ou podem conter alguns sistemas planetários, podem conter poucas estrelas (estrelas binárias, por exemplo), milhões de estrelas (como nos aglomerados globulares) ou bilhões de estrelas (como ocorre com as galáxias). Esse é o terceiro papel da interação gravitacional: formar sistemas ligados entre si gravitacionalmente.

Assim, a força gravitacional aglutina a matéria, formando objetos densos, procura aglutinar o próprio Universo e responde pela dinâmica dos objetos que ela aglomera.

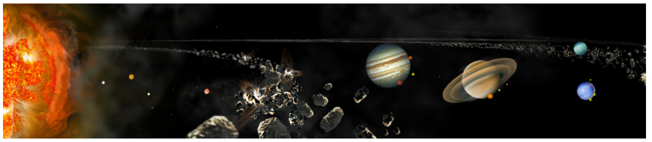

**Figura 15.1:** Sistema Solar: matéria orbitando em torno do sol.

Como resultado da interação gravitacional, os objetos existentes no Universo possuem massas cujos valores apresentam uma enorme disparidade. Isso acontece porque não há limite para se agregarem mais átomos a um dado corpo sólido ou líquido. Assim, a força gravitacional não é apenas responsável pela queda de uma maçã, pois, ao agir sobre todos os objetos que têm massa, ela tem a capacidade de agir sobre todas as partes do Universo.

Essa é a força responsável pela forma arredondada dos corpos celestes. Ela é também responsável pelo movimento dos corpos celestes, pela evolução do Universo e pela curvatura do espaço. A força gravitacional atua de uma forma constante, débil, mas que atinge os objetos independentemente de sua localização no espaço. Não há como blindá-la.

A força gravitacional é atrativa. Como resultado, ela procura sempre juntar as coisas existentes no Universo. Essa atração entre as partes produz o colapso gravitacional de grandes aglomerados de matéria, acarretando os maiores espetáculos pirotécnicos no Universo. Com isso, as estrelas se transformam em fábricas de elementos químicos mais pesados a partir da fusão dos elementos mais leves.

A gravitação é uma interação que alcança os objetos onde quer que estejam. Dizemos, em linguagem científica, que o alcance dessa força é infinito. Assim, no que dependesse apenas dessa força, o Universo seria brecado continuamente em sua expansão. Se for suficientemente intensa (se o Universo tiver muita massa), ela é capaz de juntar toda a massa do Universo num só ponto. A rigor ela alcança objetos localizados a grandes distâncias, ainda que, nesse caso, com uma intensidade bastante reduzida. Em virtude do seu alcance e de sua capacidade única de agir sobre todos os objetos no Universo, essa força é a mais importante para o entendimento da formação e do destino dos vários objetos existentes no Universo.

A força gravitacional é a mais débil entre todas. No entanto, essa debilidade é relativa. Quando uma grande massa se acumula numa região muito pequena do espaço, nenhuma outra força é capaz de se contrapor a ela. A resposta à compressão contínua da matéria pode ser uma grande explosão.

Em certa medida, é a interação menos compreendida de todas. Por não sabermos construir uma teoria quântica da gravitação, dizemos que as formulações da teoria da gravitação existentes não são completas. E isso é de certa forma bastante surpreendente, pois ela foi a primeira a ser entendida, dentro de um amplo domínio de validade, graças ao gênio de Newton.

# 15.2 Newton, a Lua e a Teoria da Gravitação Universal

As observações e as análises de Isaac Newton (1643-1727) sobre o movimento da Lua levaram-no à Teoria da Gravitação Universal. Sua primeira intuição, que se revelaria correta, dizia que tal movimento poderia ocorrer devido à mesma força que provoca a queda de uma maçã. Entendeu, portanto, que o movimento da Lua não é diferente do movimento dos projéteis.

De fato, num dos seus escritos se encontra uma ilustração parecida com aquela da **Figura 15.2**, representando o "canhão orbital de Newton". Nela Newton desenvolve o raciocínio de que, se atirarmos um objeto imprimindo a ele uma velocidade cada vez maior, ele atingirá distâncias cada vez maiores. Podemos, assim, imprimir uma velocidade suficientemente grande para que ele não caia sobre a Terra. Assim, atingiríamos uma velocidade tal que sua órbita seria circular. Para velocidades maiores do que essa, sua órbita seria elíptica. A mesma força que impulsiona os objetos em direção ao centro da Terra pode manter a Lua orbitando em torno da Terra. Imaginemos agora o caso do Sol. Sendo sua massa maior do que a da Terra, ele pode atrair os planetas. Essa atração faria com que eles orbitassem em torno do Sol, descrevendo órbitas elípticas ou circulares.

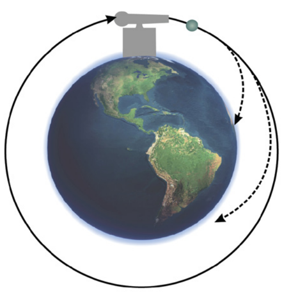

**Figura 15.2:** Canhão orbital de Newton.

Newton entendeu, assim, que há a necessidade de uma força para manter os planetas em movimento circular, e que ela é a mesma força gravitacional que atrai os objetos em direção ao solo.

O passo decisivo foi o de procurar entender as características do comportamento da força gravitacional quando variamos a distância do objeto até o centro da Terra. Para isso, comparou a força exercida pela Terra sobre um objeto na superfície terrestre e a força sobre a Lua.

Consideremos a Lua descrevendo um movimento circular de raio $R_{lua}$, e que esta esteja, num certo instante de tempo, numa posição designada por $P$ (vide **Figura 15.3**).

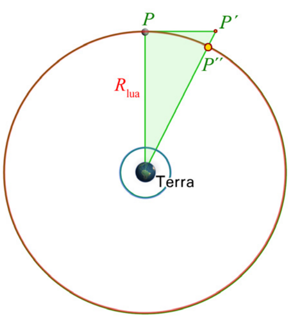


**Figura 15.3** Movimento circular de raio $R_{lua}$ da Lua.

Sem a existência de uma força, a Lua sairia pela tangente, atingindo um ponto $P'$ depois de um intervalo de tempo $\Delta t$, intervalo esse admitido como pequeno. No entanto, como o movimento é circular, ela se desvia em direção à Terra, atingindo um ponto $P''$ sobre a circunferência. A Lua estaria acelerada na direção radial. Conclui-se que a aceleração (a aceleração centrípeta) se relaciona com o período do movimento circular ($T$) de acordo com a expressão:

$$a_{\text{lua}} = \frac{v^2}{R_{\text{lua}}} = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_{\text{lua}} \qquad 15.1$$

A partir da distância da Lua ($R_{\text{lua}}$) e do período $T$ = 27,3 dias, conclui-se que as acelerações dos objetos na superfície terrestre e a aceleração da Lua são inversamente proporcionais às distâncias até o centro da Terra, ou seja:

$$\frac{a_{\text{lua}}}{a_{\text{terra}}} = \frac{a_{\text{lua}}}{g} = \left(\frac{R}{R_{\text{lua}}}\right)^2 \qquad 15.2$$

Dessa expressão, pode-se inferir que a força gravitacional decresce com o quadrado da distância ao centro da Terra. Sua Lei da Gravitação Universal estabelece que o módulo $F$ da força gravitacional é inversamente proporcional à distância e diretamente proporcional às massas dos objetos que interagem entre si, ou seja, sua componente radial é dada por:

$$F = \frac{mMG}{r^2} \qquad 15.3$$

onde $G$ é a constante da gravitação universal. Tal constante foi determinada experimentalmente por Cavendish, e seu valor é:

$$G = 6{,}673 \times 10^{-11}\ \text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$$

Por meio de métodos matemáticos desenvolvidos por Newton (o cálculo diferencial e integral, o qual foi proposto simultaneamente por Leibnitz), ele foi capaz de provar que as órbitas dos planetas são elípticas.

A 3ª Lei de Kepler pode ser inferida a partir de **15.1** e da sua segunda lei. De fato, igualando a força dada por **15.3** com o produto da massa pela aceleração, obtemos de **15.1** que:

$$\frac{m_{\text{lua}} M_{\text{Terra}} G}{R_{\text{lua}}{}^2} = m_{\text{lua}} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_{\text{lua}} \qquad 15.4$$

Após simplificações e um rearranjo das variáveis e constantes, a equação **15.4** pode ser escrita como:

$$\frac{GM_{\text{Terra}}}{4\pi^2} = \frac{\left(R_{\text{Lua}}\right)^3}{\left(T_{\text{Lua}}\right)^2} = \text{constante} \qquad 15.5$$

em conformidade com a 3ª Lei de Kepler que, nesse caso, estabelece uma relação linear entre o cubo do raio ($R$) da circunferência e o quadrado do período de revolução ($T$) do movimento circular uniforme:

$$R^3 = (\text{constante}) \times T^2 \text{ ou } \frac{R^3}{T^2} = \text{constante} \qquad 15.6$$

Ao estabelecer a lei da Gravitação Universal, Newton estabeleceu as características da força gravitacional entre dois corpos.

## Exemplos

- Exemplo 1:

Um satélite artificial de massa $m$ = 500 kg encontra-se em órbita circular a uma altitude $h$ = 600 km. Dados: $(GM_T)$ = 40 × $10^{13}$ N.m²/kg; e o raio da Terra = $R_T$ = 6.400 km.

Considerando-se o satélite, determinar:

**a.** Sua aceleração escalar.

**b.** Sua velocidade escalar.

**c.** O período ($T$) do movimento orbital do satélite.

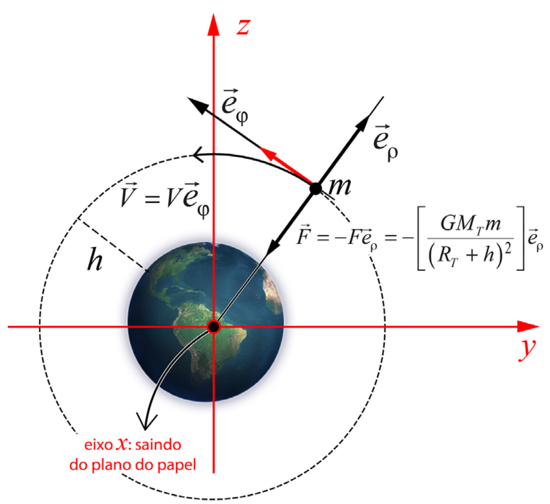


**Figura 15.4:** Componentes da força e da velocidade de um satélite em órbita circular. Os vetores $\vec{e}_\rho$ e $\vec{e}_\varphi$ são versores nas direções radial e tangencial à trajetória circular.

→ Resolução

Sobre o satélite artificial de massa $m$ atua uma única força, que é a força de atração gravitacional exercida pela Terra (de massa $M_T$, conforme ilustra a **Figura 15.4**.

A força gravitacional é descrita pela Lei da Gravitação Universal, a equação **15.3**. Dela podemos inferir que sua intensidade, ou módulo, é dada (para partículas ou corpos esféricos com distribuição de massa simétrica) pela expressão:

$$F = \frac{GM_T \cdot m}{r^2} \tag{15.7}$$

onde a distância $r$ do satélite até o centro da Terra será escrita em termos do raio da Terra e da altura até a superfície como $r = R_T + h$. A sua direção é radial, ou seja, coincidente com aquela que une o centro da Terra ao satélite e o sentido é sempre dirigido para o centro da Terra. Todos esses dados estão contidos na expressão vetorial:

$$\vec{F} = -\left[\frac{GM_T \cdot m}{(R_T + h)^2}\right] \cdot \vec{e}_\rho \tag{15.8}$$

onde $\vec{e}_\rho$ = versor na direção radial.

Em virtude do caráter circular do movimento, a força gravitacional $\vec{F}$, conforme ilustra a **Figura 15.4**, é perpendicular à velocidade $\vec{v} = v.\vec{e}_\varphi$, onde $\vec{e}_\varphi$ = versor na direção tangencial à trajetória.

**a.** A aceleração do satélite.

Nessas circunstâncias, a 2ª Lei de Newton – $\vec{F} = m.\vec{a}$ – se escreve:

$$-\left[\frac{GM_T \cdot m}{(R_T + h)^2}\right] \cdot \vec{e}_\rho = m\vec{a} \tag{15.9}$$

Donde a aceleração do satélite é dada por:

$$\vec{a} = -\left[\frac{GM_T}{(R_T + h)^2}\right] \cdot \vec{e}_\rho \tag{15.10}$$

Dessa expressão inferimos que o módulo da aceleração é $a = \frac{GM_T \cdot m}{(R_T + h)^2}$. Ademais, a sua direção é radial (direção do versor $\vec{e}_\rho$), mas no sentido oposto a ele, ou seja, apontando para o centro da Terra. Por estar sempre dirigida para o centro da circunferência (trajetória do satélite), essa aceleração é denominada aceleração centrípeta ($a_{centr}$).

Substituindo os valores fornecidos, temos:

$$a = a_{centr} = \frac{40.10^{13}\,\frac{\mathrm{N.m^2}}{\mathrm{kg}}}{(6.400.10^3\,\mathrm{m} + 600.10^3\,\mathrm{m})^2} = \frac{40.10^{13}}{(7.10^6)^2}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\right] = \frac{400}{49}\,\mathrm{N/kg} \cong 8{,}16\ \mathrm{m/s^2}$$

Vetorialmente, escrevemos:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{centr}} = -(8{,}16) \cdot \vec{e}_{\rho} \tag{15.11}$$

**b.** Velocidade escalar do satélite.

Conforme estudado em **Movimento Circular**, a aceleração centrípeta é $a_{\text{centr}} = v^2/r$. Aplicado ao movimento do satélite, temos:

$$a_{\text{centr}} = \frac{v^2}{(R_T + h)} \tag{15.12}$$

Portanto, a velocidade escalar do satélite é: $v^2 = [a_{\text{centr}}][R_T + h]$. Donde:

$$v = \sqrt{[a_{\text{centr}}][R_T + h]} \tag{15.13}$$

No caso especifico, encontramos:

$$v = \sqrt{[8{,}16\,\text{m/s}^2][7.10^6\,\text{m}]} = \sqrt{57{,}12.10^6\ \text{m}^2/\text{s}^2} \cong 7{,}56x10^3\ \text{m/s} = 7{,}56\,\text{km/s}$$

**c.** O período do movimento orbital do satélite.

O período $T$ é o intervalo de tempo necessário para que o satélite complete, em movimento circular uniforme, uma volta ao redor da Terra. Isto significa que o arco descrito no tempo $T$ é $\Delta s = 2\pi \cdot r$. Sendo $v$ = constante, podemos escrever:

$$v = \frac{\Delta s}{T} = \frac{2\pi . r}{T}\ ; \tag{15.14}$$

donde

$$T = \frac{2\pi . r}{\text{v}}$$

Substituindo-se os valores dados, concluímos que:

$$T = \frac{2 \times 3{,}14 \times (7 \times 10^6\,\text{m})}{8{,}16 \times 10^3\ \text{m/s}} \cong 5{,}4 \times 10^3\,\text{s} \cong 89{,}8\ \text{minutos}$$

# 15.4 Massa e Gravitação

A interação gravitacional se origina de um atributo dos constituintes da matéria denominado massa, ou seja, todos os objetos dotados de massa têm a capacidade de interagir entre si por meio de uma força, a qual é chamada força gravitacional. Gravitação é um efeito que se origina dessa propriedade da matéria.

Não sabemos a origem das massas das partículas em geral e – o que é mais importante – das partículas elementares (das quais todas as coisas são constituídas). O fato é que massa é um conceito fundamental e pode ser medida. Na física clássica introduzimos duas formas de medir massas. Podemos dizer que estamos definindo duas modalidades de massa.

A segunda lei de Newton estabelece uma relação linear entre a força aplicada a um corpo e a aceleração impressa a esse corpo:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{15.15}$$

A constante de proporcionalidade, $m$, é a massa do corpo que se move. Tendo em vista que, nesse caso, a massa se torna uma medida da inércia dos objetos (pois quanto maior sua massa, mais difícil se torna alterar seu estado de movimento), essa relação introduz o conceito de massa inercial.

O próprio Newton, em sua Teoria da Gravitação Universal, introduziu uma expressão para a força entre dois objetos que se transforma numa outra definição de massa. De acordo com ele, se um corpo tiver massa $m_1$ e outro corpo, situado a uma distância $d$ do primeiro, tiver uma massa $m_2$, eles se atrairão. O módulo da força experimentada por esses objetos é dado pela Lei da Gravitação Universal:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2} \tag{15.16}$$

onde $G$ é a constante da Gravitação Universal.

A relação **15.16** introduz outra maneira de definir massa. A massa definida através de **15.16** é denominada massa gravitacional.

As duas expressões clássicas acima não se constituem, a rigor, as definições do que seja massa. São expressões que nos possibilitam medir a massa de um corpo.

Tendo em vista que não temos evidências para o estabelecimento de diferenças entre massas inerciais e gravitacionais, adotamos qualquer uma das expressões anteriores como definições equivalentes de massa. Assim, uma vez que massa equivale a uma medida da quantidade de matéria e esta interage gravitacionalmente, passamos a adotar uma definição mais precisa a respeito do que denominamos matéria.

De acordo com a definição mais abrangente do termo, a gravitação é uma das quatro forças da natureza tidas como fundamentais. Além dela, temos três outras interações igualmente fundamentais: as interações eletromagnética, fraca e forte. Estas últimas competem, em sistemas que contêm uma grande quantidade de matéria, com a interação gravitacional. Esta última, ainda que muito mais débil do que as demais, jamais perde tais competições. Se a matéria existir em quantidades pequenas (como a existente no nosso mundo), admite-se o empate. Se a matéria existir em grande quantidade, ganha a gravitação.

Podemos estudar os efeitos de uma distribuição de massa (os efeitos gravitacionais provocados por ela) a partir da análise do campo gravitacional e do potencial gravitacional. As duas formas são equivalentes.

## 15.5 Massas geram dois tipos de campos

A rigor, não há necessidade de os corpos estarem em contato entre si para que eles interajam. Em particular, todas as interações fundamentais, inclusive as interações gravitacionais, são interações à distância.

Para descrever as interações à distância, fazemos uso do conceito de campo. Com isso queremos dizer que, nas formulações mais gerais e abrangentes dos fenômenos físicos, lançamos mão desse conceito. Esse é o caso, por exemplo, da teoria da gravitação formulada por Einstein e da teoria eletromagnética formulada por Maxwell.

A ideia de descrever as interações utilizando campos parte do pressuposto de que um objeto (uma partícula, um átomo, uma maçã etc.) altera, com a sua mera presença, as propriedades do espaço. A descrição dessa alteração nas propriedades do espaço se dá através do campo, que ocupa todo o espaço.

O campo abriga o conteúdo de informações, do ponto de vista das interações, que se pode extrair a respeito de objetos existentes numa determinada região do espaço. Isso se torna verdadeiro na medida em que os objetos interagem entre si através dos campos gerados por eles. Nesse sentido, a interação com o campo é equivalente à interação com aquilo que o produziu.

> É importante ressaltar que o campo existe independentemente da existência de outros objetos que interajam com ele.

Um objeto próximo à superfície terrestre, como uma maçã ou uma bússola, interage com a Terra através de um ou mais campos. O resultado da interação de um objeto com o campo gravitacional terrestre é o movimento dos projéteis. A queda de uma maçã é um exemplo simples. O movimento dos satélites já não é tão simples assim. A interação de uma agulha imantada com o campo magnético da Terra resulta na sua orientação ao longo de direções preferenciais. Ela sempre se orienta na direção dos polos.

A matéria concentrada numa determinada região do espaço gera uma alteração nas propriedades desse espaço. Chamamos essa alteração de **potencial gravitacional**. Essa grandeza física foi discutida em **Energia Mecânica**.

No entanto, como veremos a seguir, pode-se dizer que um objeto dotado de massa gera também um **campo gravitacional**.

Esses dois campos não são, no entanto, independentes e isso porque o campo gravitacional é a taxa de variação pontual do potencial gravitacional, ou seja, o campo gravitacional é um conceito derivado do primeiro.

Toda distribuição de matéria, independentemente da sua constituição, gera um campo e um potencial gravitacional. Ambos dependem da posição considerada no espaço.

## 15.6 Massas geram também um campo gravitacional

Outra consequência da alteração nas propriedades do espaço, quando existe uma distribuição de massas (ou de matéria), é a de que uma partícula de massa $m$, localizada num ponto dado pelo vetor de posição $\vec{r}$ experimenta uma força dada por **15.17**,

$$\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{g}\left(\vec{r}\right) \quad 15.17$$

onde $\vec{g}\left(\vec{r}\right)$ é o campo gravitacional produzido pelas partículas que compõem a matéria. O campo gravitacional é um campo vetorial.

Assim, temos um método bastante simples para determinar o campo gravitacional, ou seja, uma vez conhecida a força, basta dividi-la pela massa da partícula para determinarmos o campo gravitacional. Assim, por definição, temos:

$$\boxed{\vec{g}(\vec{r}) \equiv \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m}} \qquad 15.18$$

Trata-se de uma definição que nos leva à determinação empírica do campo gravitacional mais simples de ser implementada, do ponto de vista fenomenológico, do que sua análoga dada pela expressão **12.8**. É por isso que, na maioria dos casos, preferimos introduzir primeiro o campo gravitacional e, depois, o potencial gravitacional. Eles são interligados, pois

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \qquad 15.19$$

- Exemplo 2:

Considere um astro esférico de raio $R$ e massa $M$ uniformemente distribuída.

Mostre que o campo gravitacional gerado num ponto $P$ à distância $r > R$ do centro do astro é $\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2}\cdot\vec{e}_r$, onde $\vec{e}_r$ = versor na direção radial, divergente do centro do astro.

→ Resolução

A partir da equação **15.17**, o campo gravitacional no ponto $P$ à distância "$r$" do centro de $M$ é dado por **15.18** onde $\vec{F}(\vec{r})$ é a força de atração gravitacional que $M$ exerce sobre $m$ posicionado no ponto $P$. Conforme a Lei da Gravitação Universal de Newton $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GM\cdot m}{r^2}\cdot\vec{e}_r$; portanto:

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m} = -\frac{\frac{GM\cdot m}{r^2}}{m}\cdot\vec{e}_r = -\frac{GM}{r^2}\cdot\vec{e}_r \qquad 15.20$$

Conclusão: o campo gravitacional gerado em pontos ao redor de um corpo esférico de $M$ é uma grandeza vetorial:

- Módulo: $g(r) = GM/r^2$, onde $r \geq R$, o raio da esfera

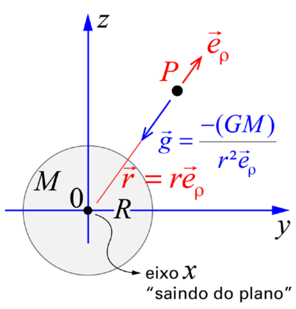


**Figura 15.5:** Esquema representativo do Exemplo 2.

- Unidade de medida: N/kg = m/s² (SI)
- Direção: radial (direção da reta que passa pelo ponto e o centro da esfera)
- Sentido: apontando para o centro da esfera.

O módulo do campo gravitacional $g(r)$ varia de forma a ser inversamente proporcional ao quadrado da distância ao centro da distribuição.

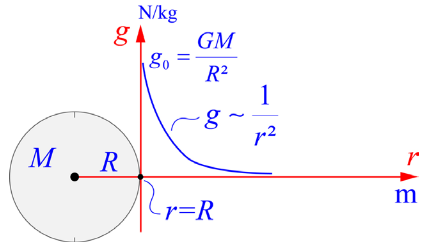


**Figura 15.6:** Variação da intensidade do campo gravitacional $g$ em ponto do espaço em função da distância $r$ do ponto ao centro de um planeta.

Na superfície do objeto esférico o campo gravitacional é $g_0 = g(r = R) = GM/R^2$ e, conforme nos afastamos dele, o campo se torna mais e mais fraco, ou seja, no limite em que $r \to \infty$ o campo gravitacional tende a zero ($g \to 0$).

- Exemplo 3:

Um satélite artificial terrestre tem órbita circular à altitude $h$ = 43.600 km. A sua massa é $m$ = 2.500 kg e sua velocidade orbital é $v = 2\sqrt{2}$ km/s.

Dados: $GM_{\text{Terra}} = 40 \times 10^{13}$ Nm²/kg ; $R_{\text{Terra}}$ = 6.400 km.

Determinar:

**a.** O campo gravitacional ao longo da órbita do satélite.
**b.** A sua energia potencial gravitacional.
**c.** A energia cinética do satélite
**d.** A energia mecânica do satélite.
**e.** O potencial gravitacional criado pela Terra ao longo da órbita do satélite.

→ Resolução

**a.** O campo gravitacional ao longo da órbita.

Fazendo uso do resultado do exemplo 2, concluímos que o campo gravitacional nos pontos pertencentes à orbita do satélite, ou seja, nos pontos localizados à distância $r$ = 6.400 km + 43.600 km = 50.000 km do centro da Terra, tem as seguintes características:

- Módulo: $g = \frac{GM_{\text{Terra}}}{r^2} = \frac{40 \times 10^{13}}{\left(50 \times 10^6\right)^2} = 0{,}16\,\text{N/kg}$ ou 0,16 m/s²
- Direção: radial
- Sentido: dos pontos da trajetória para o centro da Terra.

Vetorialmente ele pode ser assim representado:

$$\vec{g} = -(0{,}16)\cdot \vec{e}_\rho \qquad 15.21$$

onde $\vec{e}_\rho$ = versor na direção radial – divergente do centro – em cada ponto da trajetória.

**b.** Energia potencial gravitacional.

Por meio da equação **13.16**, podemos calcular a energia potencial gravitacional $U(r)$ do satélite. Obtemos a partir dos dados:

$$U(r) = -\frac{GM_{\text{Terra}}}{r} \cdot m_{\text{satélite}} = -\frac{\left[40 \times 10^{13}\right]}{(6.400 + 43.600)10^{13}} \cdot 2.500 = -20 \times 10^{9}\,\text{J}$$

Observe na **Figura 15.7** como a energia potencial varia em função da distância $r$.

Conforme nos movimentamos para pontos longínquos ($r \to \infty$), a energia potencial se torna mais e mais fraca, ou seja, $U \to 0$. Ela assume, porém, sempre valores cada vez menos negativos.

O sinal negativo da expressão do potencial indica que se trata de uma energia de ligação. Ela determina quão ligado à Terra – energeticamente falando – o satélite se encontra.

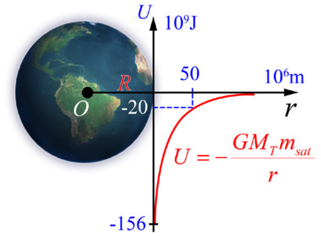

**Figura 15.7:** Comportamento da energia potencial como função da distância até o centro da Terra.

**c.** A energia cinética do satélite.

A velocidade escalar do satélite é $v = 2\sqrt{2}$ km/s $= 2\sqrt{2}.10^3$ m/s e a sua massa é $m = 2.500$ kg. Portanto, a sua energia cinética é:

$$E_c = (1/2)mv^2 = (1/2)(2.500) \cdot \left[2\sqrt{2} \cdot 10^3\right]^2 = 10 \times 10^9\,\text{J}$$

**d.** Energia mecânica do satélite.

Conforme definido em **13.48**, a energia mecânica do satélite é:

$$E = E_c + U = 10 \times 10^9\,\text{J} + \left(-20 \times 10^9\,\text{J}\right) = -10 \times 10^9\,\text{J}$$

A energia mecânica negativa significa que o satélite se encontra ligado à Terra. Para "desligá-lo" é preciso imprimir ao satélite uma energia cinética maior do que $10 \times 10^9$ J.

**e.** O potencial gravitacional criado pela Terra.

A equação que define a relação entre a energia potencial $U(r)$ de uma massa $m$ e o potencial gravitacional $V(r)$ do ponto onde a massa se encontra é: $V(r) = \dfrac{U(r)}{m}$. Como $U(r) = -[-GM_{\text{Terra}}.m]/r$:

$$V(r) = -\frac{GM_{\text{Terra}}}{r} \qquad 15.22$$

Como $GM$ = constante, o potencial gravitacional depende apenas de $r$. Assim, como os pontos da órbita do satélite têm a mesma distância em relação ao centro da Terra, esses pontos têm o mesmo potencial gravitacional. O seu valor é:

$$V_{\text{órbita satélite}} = -\frac{40\times 10^{13}}{50\times 10^{6}}\frac{\text{N}\times\text{m}^2/\text{kg}}{\text{m}} = -8\times 10^{6}\ \text{J/kg}$$

# 15.7 Determinação do campo gravitacional e do potencial gravitacional

A seguir, explicaremos como se pode determinar o campo gravitacional e o potencial gravitacional, uma vez conhecida a distribuição de matéria. Vamos dividir o tema em dois tipos de distribuição: distribuição discreta de matéria e distribuição contínua de matéria.

Uma partícula de massa $M$ e localizada na origem produz, de acordo com a lei de Newton da gravitação universal, um campo gravitacional dado pela expressão:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -MG\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -MG\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad 15.23$$

O campo gravitacional devido a uma distribuição de $N$ massas é dado como uma soma envolvendo as diferenças dos raios vetores de posição de cada uma das partículas:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \qquad 15.24$$

O potencial gravitacional, por outro lado, é dado pela expressão **13.12**.

No caso de uma distribuição volumétrica, caracterizamos a distribuição por uma função de distribuição, a qual é conhecida como densidade de massa. Representamos uma densidade volumétrica pela letra ρ e escrevemos:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dm}{dV} \qquad 15.25$$

Ela permite determinar o quanto de massa está contido numa determinada unidade de volume, localizada num ponto cujo raio vetor de posição é $\vec{r}$:

$$dm = \rho(\vec{r})\,dV \tag{15.26}$$

Observe que, de acordo com a expressão **15.26**, a densidade pode variar de ponto para ponto no espaço. Por isso, indicamos que a distribuição depende do ponto cuja posição é indicada pelo vetor $\vec{r}$.

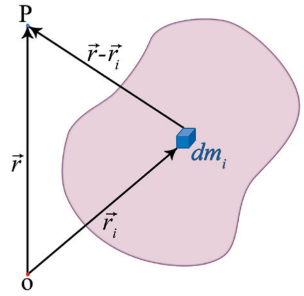


**Figura 15.8:** No caso de uma distribuição contínua de massas devemos efetuar uma soma sobre infinitas contribuições.

Para uma distribuição volumétrica de massa, o campo e o potencial gravitacionais são dados pelas expressões:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \sum_{\text{massas}} \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\,dm(\vec{r}') = -G \sum_{\text{Volume}} \frac{\vec{r}'-\vec{r}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\,\rho(\vec{r}')\,d^3r' \tag{15.27}$$

$$V(\vec{r}) = -G \sum_{\text{massas}} \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\,dm(\vec{r}') = -G \sum_{\text{Volume}} \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\,\rho(\vec{r}')\,d^3r' \tag{15.28}$$

onde a soma agora envolve um número infinito de pontos. A essa soma damos o nome de **integral**.

- Exemplo 4:

Marte, o 4º planeta do Sistema Solar a partir do Sol, tem densidade média $\rho_{\text{médio}}$ = 3,9 g/cm³ e raio equatorial médio $R_{\text{médio}}$ = 3.400 km. Partindo do pressuposto de que tal planeta seja perfeitamente esférico e de densidade igual à densidade média, determine a intensidade do campo gravitacional gerado por Marte em sua superfície.

→ Resolução

O módulo (ou intensidade) do campo gravitacional gerado pelo planeta Marte no espaço ao seu redor é determinado pela expressão: $g = GM/r^2$. Para se determinar o campo gravitacional, na sua superfície devemos considerar, como enunciado, que o seu raio seja o raio equatorial médio, ou seja, $r = R_{\text{médio}} = 3{,}4 \times 10^6$ m.

A massa, de acordo com a hipótese da homogeneidade do planeta, deve ser determinada em função da densidade média e do raio $R_{\text{médio}}$ de Marte. Quando usamos a "densidade média" estamos considerando Marte como uma esfera homogênea e, dessa forma, a equação **15.26** pode ser assim escrita: $\rho_{\text{média}} = M/V$, onde $V = (4/3)\pi(R_{\text{médio}})^3$. A massa pode, para um planeta esférico e homogêneo, ser expressa em função do raio adotado como o raio médio como:

$$M = \rho_{\text{médio}}\left[V\right] = \rho_{\text{médio}}\left[(4/3)\pi\left(R_{\text{médio}}\right)^3\right] \qquad 15.29$$

Portanto,

$$g_0 = \frac{GM}{\left(R_{\text{médio}}\right)^2} = \frac{G\left[\rho_{\text{médio}}\left[(4/3)\pi\left(R_{\text{médio}}\right)^3\right]\right]}{\left(R_{\text{médio}}\right)^2} = \left(\frac{4\pi}{3}\right)G\rho_{\text{médio}}R_{\text{médio}}$$

Substituindo-se os valores das grandezas envolvidas nessa equação: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg²; $\rho_{\text{médio}} = 3{,}9$ g/cm³ $= 3{,}9 \times 10^3$ kg/m³ e $\pi = 3{,}14$, tem-se:

$$g_0 = \left[\frac{4\times 3{,}14}{3}\right]\left[6{,}67\times 10^{-11}\,\text{Nm}^2\text{kg}^2\right]\left[3{,}9\times 10^3\,\text{kg/m}^3\right]\left[3{,}4\times 10^6\,\text{m}\right] \cong 3{,}7\,N/\text{kg}^2 = 3{,}7\,\text{m/s}^2$$

## 15.8 Campo gravitacional gerado por uma distribuição esférica de massas

Consideremos agora o caso de uma distribuição esférica de matéria. Isso significa que a densidade varia apenas com a distância das partículas até a origem. Esse é o caso da maioria dos corpos celestes. Assim, escrevemos:

$$\rho(\vec{r}) = \rho\left(|\vec{r}|\right) = \rho(r) \qquad 15.30$$

Em vista da propriedade **15.30**, para os pontos externos ou na superfície da distribuição de matéria, valem as seguintes expressões para o campo gravitacional e potencial:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -g(r)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad 15.31$$

$$V(\vec{r}) = V(r) \qquad 15.32$$

onde agora $M_T$ é a massa total da distribuição esférica de matéria e $r = |\vec{r}|$ é a distância até o centro da distribuição.

**Figura 15.9:** Uma distribuição de massa esfericamente simétrica.

Consideramos primeiramente uma esfera imaginária de raio $r$ passando pelo ponto que dista $r$ do centro da distribuição de massa (**Figura 15.10**).

Podemos escrever para o campo devido à distribuição esférica de massa:

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2} \qquad 15.33$$

onde $M(r)$ é a massa no interior da esfera imaginária mencionada.

Temos assim que, para os pontos exteriores à distribuição de massa, a massa $M(r)$ é a massa total da distribuição:

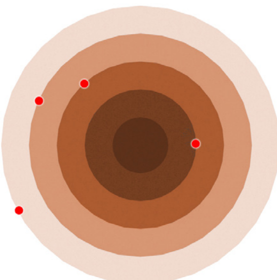

**Figura 15.10:** Pode-se determinar o campo gravitacional num ponto a uma distância $R$ levando-se em conta tão somente a massa no interior de uma esférica imaginária de raio $R$.

$$M(r) = M_{\text{total}} \qquad 15.34$$

Isto vale para qualquer valor de $r$ para o qual $r > R$, onde $R$ é o raio da distribuição de massa. E, portanto, para os pontos externos à distribuição, valem as expressões:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -M_{\text{Total}} G \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \qquad 15.35$$

$$V(\vec{r}) = -M_{\text{Total}} G \frac{1}{r} \qquad 15.36$$

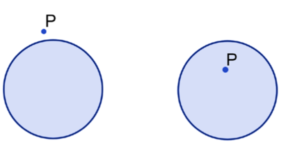


**Figura 15.11:** Campo gravitacional para pontos externos e internos de distribuição esfericamente simétrica.

onde $M$ é a massa total da distribuição esférica.

Concluímos que, para pontos exteriores à distribuição, tanto o campo gravitacional quanto o potencial são equivalentes à distribuição de uma massa puntiforme quando consideramos a massa total concentrada na origem.

- Exemplo 5:

Como varia o campo gravitacional gerado pela Terra?

**a.** Em pontos de altitude $h$ cada vez maiores?

**b.** Em pontos situados num túnel hipotético da superfície até o centro da Terra?

→ Resolução

**a.** Campo gravitacional gerado pela Terra

Para pontos fora do planeta (condição que escrevemos como $r \geq R_{\text{Terra}}$), a componente radial do campo gravitacional é dada por:

$$g(r) = GM_{\text{Terra}}/r^2. = \left[40\times10^{13}\right]/r^2 = \left[40\times10^{13}\right]\left[1/r^2\right]$$

Esta equação – válida para $r \geq R$ (raio da Terra) – permite calcular o campo gravitacional em pontos na superfície da Terra; basta substituir $r$ = raio da Terra. Assim, a intensidade (ou módulo) do campo na superfície da Terra é dada por:

$$g_0 = \left(40\times10^{13}\,\text{N.m}^2/\text{kg}\right)/\left(6{,}378\times10^6\,\text{m}\right) = 9{,}83\,\text{N/kg} = 9{,}83\,\text{m/s}^2$$

Para pontos $r > R$, a intensidade do campo gravitacional é $g < g_0$ = 9,83 N/kg. Por exemplo, a intensidade do campo gravitacional gerado pela Terra na órbita da Lua (distância da órbita ao centro da Terra é $r$ = 384.000 km = 384 × $10^6$ m) é:

$$g(r) = \left(40\times10^{13}\right)/\left(384\times10^6\right)^2 \approx 0{,}00027\,\text{N/kg}$$

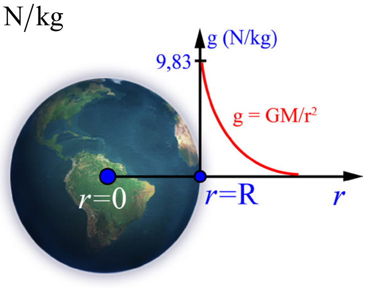

Figura 15.12

Concluímos portanto que, para pontos localizados a 380.000 km da Terra, o campo gravitacional é pequeno quando comparado com o campo de pontos localizados sobre a superfície da Terra, mas, ainda assim, ele se faz presente. O movimento da Lua é uma prova disso. Observe na **Figura 15.12** a variação do campo conforme a distância $r$ aumenta. A intensidade do campo gravitacional é inversamente proporcional a $r^2$.

**b.** Campo gravitacional em pontos situados num túnel hipotético da superfície até o centro da Terra. A equação $g(r) = (GM)/r^2$ não se aplica a pontos no interior do planeta. Ela é válida para pontos na superfície ($r = R$) ou para pontos externos à superfície ($r > R$).

Para pontos no interior da esfera, não se pode considerar a massa *M* concentrada no centro, pois, conforme nos movemos em direção ao centro da Terra, uma casca cada vez mais espessa vai sendo deixada para trás. Com isso, a massa que gera o campo gravitacional torna-se, para esses pontos no interior da Terra, cada vez menor.

Para determinar a expressão do campo num ponto a uma distância *r* do centro e no interior da Terra, deve-se considerar apenas a massa abaixo de uma casca de raio *r*. Para tanto, utilizamos o artifício descrito a seguir.

Considerando-se que a massa *M* no interior da esfera hipotética de raio *r* se distribua uniformemente e que a densidade é constante, temos assim:

$$\rho = M/V = M \Big/ \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \tag{15.37}$$

donde concluímos que a massa de uma esfera hipotética de raio *r*, no interior da Terra, depende do raio da seguinte forma:

$$M = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \tag{15.38}$$

Substituindo-se esse valor da massa *M* na expressão de *g* em **13.42**, temos:

$$g_{r<R} = G\left(\frac{4}{3}\pi\rho r^3\right)\Big/ r^2 = G\left(\frac{4}{3}\pi\rho\right) r \tag{15.39}$$

Em particular, no centro da Terra, o campo gravitacional se anula ($g = 0$).

Assim, para $r < R$ (no interior da Terra), a intensidade do campo tem variação diretamente proporcional à distância até o centro enquanto, para pontos fora do planeta ($r \geq R$), o campo varia na razão inversa do quadrado da distância, conforme a **Figura 15.13**. A partir do centro da Terra, o campo cresce para cada vez mais até atingir o valor máximo que ocorre para pontos na superfície ($g$ = 9,83 N/kg).

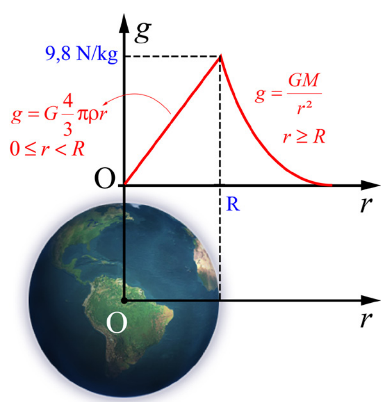


Figura 15.13

# 15.9 A aceleração da gravidade

Consideremos um objeto esférico como, por exemplo, a Terra, o Sol ou os planetas. Nessas circunstâncias, sabemos que a força que esse objeto esférico de massa $M$ exerce sobre um objeto de massa $m$ a uma distância $r$ do centro do corpo esférico (e cuja posição é dada pelo vetor $\vec{r}$) será dada, utilizando a expressão **13.23**, por:

$$\vec{F} = m\vec{g}\left(\vec{r}\right) = -mGM_T \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{15.40}$$

Tendo em vista a lei de Newton, podemos concluir que a aceleração impressa pela força da gravidade será:

$$\vec{a}_g = -GM_T \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{15.41}$$

Assim, concluímos que, devido à natureza atrativa da força gravitacional, a aceleração está sempre dirigida para o interior do corpo esférico. Na superfície desse corpo esférico, e admitindo que o seu raio seja $R$, a aceleração da gravidade (agora denominada $g$) será dada, em módulo, pelo valor:

$$g = \frac{GM_T}{R^2} \tag{15.42}$$

**Figura 15.14:** O campo gravitacional da lugar exerce uma força e isso leva a queda dos objetos.

Como consequência, próximo de um objeto esférico como a Terra, todos os objetos caem com a mesma aceleração (independentemente de suas massas). Essa aceleração é conhecida como aceleração da gravidade $g$ e ela só depende do raio do objeto esférico e da sua massa total.

O valor da aceleração da gravidade na superfície terrestre é conhecido desde os tempos de Galileu. Seu valor é de aproximadamente:

$$g \cong 9{,}8 \text{ m/s} \tag{15.43}$$

Uma vez conhecida a aceleração da gravidade, e a partir do valor da constante gravitacional, podemos inferir a massa de um objeto. No caso da Terra, por exemplo, sua massa será dada por:

$$M_T = 6 \times 10^{24}\,\text{kg} \qquad 15.44$$

Ao determinar $G$, e a partir do valor já bastante conhecido de $g$, Cavendish "pesou" a Terra. A distribuição de matéria na Terra não é uniforme. Ela depende da camada a que nos referimos. No núcleo, a densidade é muito maior do que a média. O valor médio da densidade da Terra é:

$$\bar{\rho} \cong 5{,}5\ \text{gr/cm}^3 \qquad 15.45$$

- Exemplo 6:

David Scott, astronauta da Apollo 15, quando andava na Lua, deixou cair, simultaneamente, um martelo e uma pena de falcão de uma mesma altura. Sem a resistência do ar, ambos chegaram juntos ao solo. O martelo e a pena caíram com aceleração de queda $a$ = 1,62 m/s². Calcular a massa da Lua. Dado: $G$ = 6,67 × $10^{-11}$ N.m²/kg e raio da Lua = $R_{\text{Lua}} \approx$ 1.740 km.

→ Resolução

Na Lua, onde existe uma atmosfera desprezível, os objetos, praticamente, caem livremente. Assim, o martelo caiu verticalmente em direção ao centro da Lua com aceleração de módulo $a_{\text{martelo}}$. Conforme a 2ª Lei de Newton:

$$F_{\text{martelo}} = m.a_{\text{martelo}} \qquad 15.46$$

Mas,

$$F_{\text{martelo}} = F_{\text{Grav Lua/martelo}} = \frac{GM_{\text{Lua}}.m_{\text{martelo}}}{r^2} \qquad 15.47$$

sendo assim:

$$\frac{GM_{\text{Lua}}.m_{\text{martelo}}}{r^2} = m.a_{\text{martelo}} \qquad 15.48$$

Cancelando a massa do martelo, que aparece em ambos os membros da igualdade, resulta na seguinte aceleração do martelo:

$$a_{\text{martelo}} = \frac{GM_{\text{Lua}}}{r^2} \qquad 15.49$$

O mesmo ocorre com a pena, repetindo-se o desenvolvimento anterior – agora aplicado à pena do falcão –, obtém-se:

$$a_{\text{pena}} = \frac{GM_{\text{Lua}}}{r^2} \tag{15.50}$$

Verifica-se que, como observado por Scott, $a_{\text{martelo}} = a_{\text{pena}} = (GM_{\text{Lua}})/r^2$, ou seja, na ausência de forças que se opõem ao movimento, os objetos caem com a mesma aceleração, ou seja, abandonados de uma mesma altura, a pena e o martelo atingem o solo no mesmo instante:

$$a = \frac{GM_{\text{Lua}}}{r^2} \tag{15.51}$$

Assim, medindo-se a aceleração de queda, a massa da Lua pode ser determinada. Obtém-se:

$$M_{\text{Lua}} = \frac{a.r^2}{G} = \frac{(1{,}62)\left(1{,}74\times10^6\right)^2}{6{,}67\times10^{-11}} = 7{,}35\times10^{22}\,\text{kg}$$

- Exemplo 7:

Antes de prosseguirem viagem em direção à Lua, as naves espaciais “Apollo” davam algumas voltas em torno da Terra. Uma delas, com massa total $m$ = 25.000 kg, realizou 4 voltas em uma órbita terrestre localizada a 200 km de altitude e com velocidade orbital $v \cong 7{,}8$ km/s.

Determinar, a partir dos dados $GM_{\text{Terra}} = 40 \times 10^{13}$ N.m²/kg; e $R_{\text{Terra}}$ = 6.378 km, as seguintes grandezas:

**a.** O campo gravitacional e a força de atração que a Terra exerce sobre a nave mencionada quando nesta altitude.

**b.** O potencial gravitacional gerado pela Terra nos pontos cujas altitudes sejam $h$ = 200 km.

**c.** A energia potencial da nave quando na superfície e à altura $h$ = 200 km.

**d.** A energia mecânica desta nave na sua órbita terrestre.

**e.** A variação da energia potencial gravitacional da nave quando ela se movimenta da sua órbita terrestre e atinge a órbita da Lua ($r$ = 384.000 km).

→ Resolução

**a.** O campo gravitacional e a força de atração que a Terra exerce sobre a nave nesta altitude.

À altitude $h$ = 200 km, a distância ao centro da Terra é:

$$r = R_{\text{Terra}} + h = 6.378\text{ km} + 200\text{ km} = 6.578\text{ km} = 6{,}578\times10^6\,\text{m}$$

Assim, a intensidade do campo gravitacional é:

$$g = \left[40 \times 10^{13}\,\mathrm{N.m^2/kg}\right] / \left(6{,}578 \times 10^{6}\,\mathrm{m}\right)^2 \approx 9{,}24\,\mathrm{N/kg} = 9{,}24\,\mathrm{m/s^2}$$

Nesta altitude, a Terra atrai a nave com uma força cujo módulo é:

$$F = mg = \left(25.000\ \mathrm{kg}\right) / \left(9{,}24\,\mathrm{N/kg}\right) = 231.000\ \mathrm{N}$$

**b.** Potencial gravitacional gerado pela Terra em pontos cujas altitudes sejam $h$ = 200 km.

O potencial gravitacional gerado por um corpo esférico de raio $R$ e massa $M$, em ponto distante $r \geq R$ de seu centro, é dado pela relação:

$$V\left(r\right) = -G\,M/r \qquad 15.52$$

Para o nosso planeta, e considerando o valor $(GM_{\text{Terra}}) = 40 \times 10^{13}$ N.m²/kg, o potencial gravitacional $V$ num ponto distante $r$ do centro da Terra é:

$$V\left(r\right) = -\left[40 \times 10^{13}\right]/r$$

Esta relação indica que $V(r)$ é inversamente proporcional a $r$ (enquanto o campo gravitacional $g$ é inversamente proporcional a $r^2$).

Para a altitude $h$ = 200 km, a distância ao centro da Terra é:

$r$ = 6.378 + 200 = 6.578 km = 6,578 × $10^6$ m; e, portanto, o potencial gravitacional é:

$$V = -\left[40 \times 10^{13}\right]/\left[6{,}578 \times 10^{6}\right] = -61 \times 10^{6}\ \mathrm{J/kg}$$

**c.** Qual a energia potencial da nave quando na superfície e à altura $h$ = 200 km?

Conhecido o potencial gravitacional $V(r)$ de um ponto do espaço à distância $r$ do centro da Terra, a energia potencial gravitacional ($U$) de um corpo de massa $m$, neste ponto, é determinada por:

$$U = m.V\left(r\right) \qquad 15.53$$

| | $V(r)$ (J/kg) | $U = m.V(r)$ [J] |
|---|---|---|
| **Na superfície ($h$ = 0)** | $-63 \times 10^6$ | $(25 \times 10^3)(-63 \times 10^6) \approx -1.575 \times 10^9$ |
| **À altitude $h$ = 200 km** | $-61 \times 10^6$ | $(25 \times 10^3)(-61 \times 10^6) \approx -1.525 \times 10^9$ |

**d.** A energia mecânica desta nave na sua órbita terrestre.

Lembrando que $E$ = "energia cinética" + "energia pot. gravitacional" ou $E = ½\,mv^2 + m \cdot V(r)$, e que, no caso da nave à altitude $h$ = 200 km, os dados são: $m$ = 25.000 kg, $v = 7{,}8 \times 10^3$ m/s, $r = R + h = 6{,}578 \times 10^6$ m; obtemos:

$$V\left(r = R + h\right) = -61 \times 10^{6}\ \mathrm{J/kg}$$

Logo:

$$Ec = \frac{1}{2}\left(25\times10^{3}\,\text{kg}\right)\left(7{,}8\times10^{3}\,\text{m/s}\right)^{2} \approx 761\times10^{9}\,\text{J}\left(\text{joule}\right)$$

$$U = \left(25\times10^{3}\,\text{kg}\right)\left(-6{,}1\times10^{7}\,\text{J/kg}\right) \approx -1.525\times10^{9}\,\text{J}$$

Portanto,

$$E = Ec + U = (761 \times 10^9\ \text{J}) + (-1.525 \times 10^9\ \text{J}) = -764 \times 10^9\ \text{J}$$

Observação:

Energia mecânica negativa significa que a nave está "ligada" ao campo gravitacional terrestre. Para libertá-la da atração gravitacional é preciso fornecer energia igual ou maior do que $7{,}64 \times 10^9$ J.

**e.** A variação da energia potencial gravitacional da nave quando ela se movimenta da sua órbita terrestre e atinge a órbita da Lua ($r$ = 384.000 km).

Dados:

- Na órbita terrestre, $r_1 = R + h \approx 6.400$ km (altitude da nave $h$ = 200 km);
- Na órbita da Lua, $r_2$ = 384.000 km);
- Massa da nave: $m = 25 \times 10^3$ kg.

| | $r$ ($m$) | $U = mV(r) = -m[GM]/r$ **(J)** |
|---|---|---|
| **Órbita terrestre** | $6{,}4 \times 10^6$ | $-(25 \times 10^3)(40 \times 10^{13})[1/(6{,}4 \times 10^6) = -1.562{,}5 \times 10^9$ |
| **Órbita da Lua** | $384 \times 10^6$ | $-(25 \times 10^3)(40 \times 10^{13})[1/(384 \times 10^6) = -26 \times 10^9$ |

A variação de energia potencial da nave é:

$$\Delta U = \left[U_{(2)}\right] - \left[U_{(1)}\right] \rightarrow \Delta U = \left(-1.562{,}5\times10^{9}\right) - \left(-26\times10^{9}\right) = 1.536{,}5\times10^{9}\,\text{J} \approx 1540\times10^{9}\,\text{J}$$

A variação da energia potencial gravitacional da nave – quando ela se movimenta da órbita terrestre ($h$ = 200 km) até a órbita da Lua (384.000 km) – é $\Delta U \cong +1540 \times 10^9$ J.

- Exemplo 8:

Mostre que a variação de energia potencial gravitacional de um corpo de massa $m$ quando ele for erguido de uma altura $h$ em pontos próximos da superfície da Terra (pequenas altitudes) é:

$$\Delta U = m.g.h \tag{15.54}$$

onde $g = [GM]/R^2$ é a intensidade do campo gravitacional na superfície.

→ Resolução

| | $r = R + h$ | $V(r)$ | $U = mV(r)$ |
|---|---|---|---|
| **Superfície ($h$ = 0)** | $r_1 = R$ | $V_1 = -[GM/R]$ | $U_{(1)} = -m[GM/R]$ |
| **Altitude ($h$ > 0)** | $r_2 = (R + h)$ | $V_2 = -[GM/(R+h)]$ | $U_{(1)} = -m[GM/(R+h)]$ |

A variação da energia potencial é: $\Delta U = U_{(2)} - U_{(1)}$ . Donde obtemos:

$$\Delta U = \{-m.[GM]/(R+h)\} - \{-m.[GM]/(R)\}$$

Eliminando os colchetes, temos:

$$\Delta U = -m.[GM]/(R+h) + m.[GM]/(R) = m[GM/R] - m\left[GM/(R+h)\right)$$

Colocando em evidência o termo comum, $m[GM]$, encontramos:

$$\Delta U = mGM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$$

Finalmente, colocando-se $R$ na expressão acima em evidência no denominador:

$$\Delta U = m.\left[GM/\left[1/R - 1/(R+h)\right)\right] = m.[GM]\left[\frac{(R+h)-R}{R(R+h)}\right] = m[GM]\left[\frac{h}{R(R+h)}\right]$$

$$\Delta U = m.\frac{GM}{R^2}\left[\frac{h}{\left(1+\left(\frac{h}{R}\right)\right)}\right] \tag{15.55}$$

Mas, $GM/R^2 = g_0$ - campo gravitacional na superfície da Terra. Logo:

$$\Delta U = m.g_0\left[\frac{h}{\left(1+\left(\frac{h}{R}\right)\right)}\right] \tag{15.56}$$

Para pequenas altitudes, por exemplo, pontos tais que $h \leq 0{,}01R$, podemos desprezar o termo contendo ($h/R$), uma vez que ($h/R$) < 0,01. Nessas condições, desprezando-se o termo ($h/R$) obtemos (depois de desprezá-lo) uma diferença menor do que 2% no cálculo da energia potencial. Assim, sempre que não for exigida uma precisão inferior a 2%, a expressão da energia potencial toma a seguinte forma:

$$\Delta U = m.g_0h. \rightarrow U_{(2)} - U_{(1)} = mg_0h \tag{15.57}$$

Adotando-se $U_{(1)} = 0$ na superfície da Terra, escrevemos:

$$U_2 = mg_0h \qquad (15.58)$$

Como o índice (2) se refere a uma altura $h$ genérica, a energia potencial $U$ de um corpo de massa $m$, no campo gravitacional $g_0$ – próximo à superfície da Terra – à altitude $h$ é determina pela relação:

$$\mathrm{U = m.g_0h} \qquad (15.59)$$

### Curiosidade

A energia potencial de um avião voando a 5.000 m de altura e com massa $m$ = 180.000 kg é

$$U = m.g.h = (180.000\ \text{kg})(9{,}83\,\text{N/kg})(5.000\ \text{m}) = 8.847 \times 10^6\,\text{J}$$

- Exemplo 9:

Velocidade de escape – $v_e$ – de um planeta é a velocidade que se deve imprimir a um corpo para que ele escape do respectivo campo gravitacional. Determine a velocidade de escape da Terra.

→ Resolução

Um corpo de massa $m$ lançado a partir da superfície da Terra rumo ao espaço, dotado de energia cinética $Ec = ½\, m.v^2$, tem energia potencial gravitacional dada por $U = -m(GM)/R$, onde $M$ e $R$ são, respectivamente, a massa e o raio da Terra. Portanto, no ato do lançamento, a energia mecânica do corpo é:

$$E = \tfrac{1}{2} m.v^2 - m(GM)/R \qquad (15.60)$$

Conforme o corpo se distancia da Terra, a sua energia cinética ($½.mv^2$) transforma-se em energia potencial; a energia cinética diminui e a energia potencial ($E_p = -mGM/r$) aumenta, ou seja, torna-se cada vez menos negativa.

A distância (ou altura máxima) é atingida quando a energia cinética se transformar totalmente em energia potencial gravitacional (supondo que a energia mecânica seja conservada). Se a distância máxima for, por exemplo, alcançada à altitude de 10 km, o corpo retorna para a Terra sob a ação da força gravitacional.

Para que o corpo atinja um ponto suficientemente longínquo, de forma que escape do campo gravitacional da Terra, sua energia deve ser, no mínimo, nula.

Assim, fundamentado na Lei da Conservação de Energia:

$$E_{inicial} = E_{final}$$

Escrevemos, para que o corpo escape:

$$\frac{1}{2} m.v^2 - m(GM)/R = 0 \qquad 15.61$$

Nessas condições, a velocidade de lançamento $v = v_e$ = velocidade de escape.

Portanto, $\frac{1}{2}\, mv_e^{\,2} - m(GM)/R = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\, mv_e^{\,2} = m(GM)/R \rightarrow \frac{1}{2}\, v_e^{\,2} = (GM)/R$; donde

$$v_e = \sqrt{2GM/R}$$

Para o caso da Terra: $GM = 40 \times 10^{13}$ N.m²/kg e $R = 6{,}378 \times 10^6$ m

$$v_e = \sqrt{\left[2\left(40 \times 10^{13}\right)/6{,}378 \times 10^6\right]} = 11{,}2 \times 10^3 \text{ m/s} = 11{,}2 \text{ km/s}$$

Observe que a velocidade de escape não depende da massa do corpo lançado para o espaço.

Agora é sua vez...

Acesse o Ambiente Virtual de Aprendizagem e realize a(s) atividade(s) proposta(s).