ASPECTOS GERAIS E AS LEIS DE KEPLER

16

Gil da Costa Marques

16.1 Introdução
16.2 Forças Centrais
16.3 Dinâmica do movimento
16.4 Conservação do Momento Angular
16.5 Energias positivas, negativas e nulas
16.6 Velocidade de Escape
16.7 Órbitas
16.8 As Leis de Kepler
16.9 A velocidade radial: Afélio e Perihélio
16.10 O Efeito do Momento Angular: O Potencial Efetivo

16.1 Introdução

Uma das grandes realizações de Newton foi ter conseguido deduzir as Leis de Kepler, especialmente aquela que estabelece as cônicas como órbitas possíveis, a partir da sua teoria dinâmica e da ideia de que a força gravitacional varia com o inverso do quadrado da distância entre os objetos que interagem entre si.

Na parte final deste texto abordaremos as leis de Kepler, às quais se aplicam as forças atrativas que derivam da energia potencial dada pela expressão geral:

$$U(r) = -\frac{k}{r} \tag{16.1}$$

Um caso particular da expressão **16.1** é aquele de objetos de massa *m* (como cometas e planetas) gravitando em torno de uma estrela de massa *M*, como o Sol. O mesmo se aplica a luas girando em torno de planetas. Nesse caso, de acordo com a Teoria da Gravitação Universal, a energia potencial de um desses objetos é dada por:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \tag{16.2}$$

Neste texto, deduziremos alguns resultados gerais para forças centrais (como é o caso da força gravitacional que resulta de uma distribuição esférica de massa) e discutiremos aplicações para forças que dependem do inverso do quadrado da distância. Exceto pelas leis de Kepler, todos os resultados aqui deduzidos valem para forças centrais de uma maneira geral.

16.2 Forças Centrais

A força gravitacional exercida por um objeto cuja massa é distribuída de uma forma esfericamente simétrica faz parte de um seleto grupo de forças conhecidas genericamente como **forças centrais**.

Adotando-se um sistema de coordenadas tal que a origem esteja no centro de um objeto de grande massa, como o Sol, forças centrais são aquelas que, utilizando coordenadas esféricas, podem ser escritas sob a forma:

$$\vec{F}(r) = F(r)\frac{\vec{r}}{r} \quad (16.3)$$

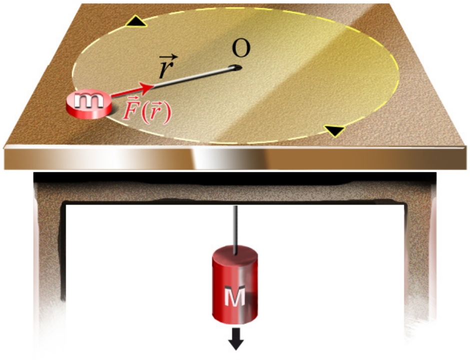

Figura 16.1: a força agindo sobre o objeto de massa "m" é uma força central.

onde $F(r)$ é a componente radial da força, e r é a distância do corpo que experimenta tal força até o centro onde se localiza o objeto que dá origem a tal força. Forças centrais apontam sempre para um centro, aqui localizado na origem. O centro de forças gravitacionais para objetos se movendo próximo do Sol é um ponto no centro do Sol. O centro de forças de objetos sob a influência gravitacional da Terra se localiza no centro da Terra. Essa regra é geral. Ou seja, o centro de forças de objetos, cujas distribuições de massas tenham simetria esférica, é o centro geométrico dessa distribuição esférica.

A interação gravitacional dá lugar a uma grandeza conservada ao longo do movimento. Como visto antes, tal grandeza é a **energia mecânica**, a qual é dada por:

$$\boxed{E = \frac{m}{2}\vec{V}^2 + U} \quad (16.4)$$

A força, por outro lado, se relaciona de uma forma simples com a **energia potencial**. Tal relação é:

$$F(r) = -\frac{dU(r)}{dr} \quad (16.5)$$

Uma característica importante das forças centrais é que partículas sob a ação dessas forças exibem outra grandeza conservada ao longo do movimento. Tal grandeza é o **momento angular**. De fato, da definição de momento angular segue que sua taxa de variação se anula:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)}{dt} = -\vec{r}\times\left(\frac{\partial U(r)}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r}\right) = 0 \qquad 16.6$$

O que nos leva a concluir que o momento angular é constante:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_0} \qquad 16.7$$

onde $\vec{L}_0$ é um vetor constante.

O fato do momento angular ser conservado acarreta duas consequências desse. A primeira consequência é que o **movimento se dá inteiramente num plano**. Pode-se deduzir esse fato considerando-se produto escalar do vetor posição pelo vetor momento angular. Tal produto é nulo. Escrevemos:

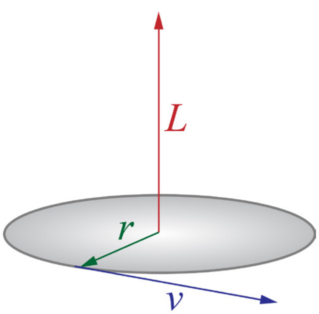

Figura 16.2: O movimento se dá num plano passando pela origem.

$$\vec{r}\bullet\vec{L}_0 = 0 \qquad 16.8$$

A equação **16.8** é a equação de um plano que passa, necessariamente, pela origem do centro de força (uma vez que a origem pertence ao plano) e tendo o vetor $\vec{L}_0$ como um vetor perpendicular a ele.

A segunda consequência será analisada posteriormente.

16.3 Dinâmica do movimento

Tendo em vista que o movimento se dá num plano, podemos fazer uso das coordenadas polares para descrevê-lo. Utilizamos nesse caso, a base de versores já definida. Eles são denotados por:

$$\vec{e}_r \ \text{e} \ \vec{e}_\varphi \qquad 16.9$$

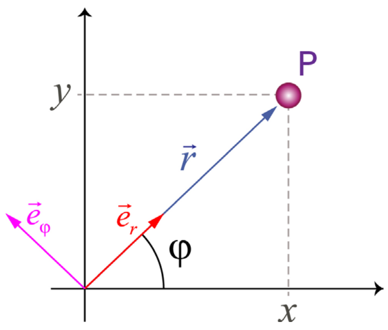

Figura 16.3: Coordenadas polares.

Primeiramente, recordamos que em coordenadas polares, a velocidade se escreve sob a forma:

$$\vec{V} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi \tag{16.10}$$

Consequentemente, o vetor momento angular se escreve como:

$$\vec{L} = L_z\vec{k} \equiv mr^2\frac{d\varphi}{dt}\vec{k} \tag{16.11}$$

Indicando, como já previsto, que ele é um vetor perpendicular ao plano da órbita.

Consideremos agora as componentes polares da força, as quais são definidas como produtos escalares da força pelos versores já referidos (as projeções). Essas componentes são dadas por:

$$\begin{aligned} F_r &\equiv \vec{F}\cdot\vec{e}_r \\ F_\varphi &\equiv \vec{F}\cdot\vec{e}_\varphi \end{aligned} \tag{16.12}$$

Lembramos que a equação de Newton se escreve, em coordenas polares, como:

$$\boxed{\begin{aligned} ma_r &= F_r \\ ma_\varphi &= F_\varphi \end{aligned}} \tag{16.13}$$

Para uma força central, temos que:

$$\vec{F}(r) = F(r)\vec{e}_r \tag{16.14}$$

E, portanto, a componente tangencial da força se anula. Desse fato resulta que para forças centrais, as componentes das equações de Newton se escrevem como:

$$\begin{aligned} m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) &= F_r(r) \\ 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \tag{16.15}$$

Multiplicando a última equação por r vemos que ela pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt}\left\{r^2\frac{d\varphi}{dt}\right\}=0 \qquad 16.16$$

Essa equação implica que a grandeza física definida como

$$L_z \equiv mr^2\frac{d\varphi}{dt} \qquad 16.17$$

é uma constante no tempo, isto é,

$$L_z \equiv mr^2(t)\frac{d\varphi(t)}{dt}=L_0 \qquad 16.18$$

De **16.18** podemos concluir que a segunda equação indica que o momento angular é conservado. Veremos que a conservação do momento angular implica na lei das áreas, uma das leis de Kepler do movimento planetário.

E, portanto, no caso de uma força central, as equações se simplificam, pois elas se reduzem a uma lei de conservação do momento angular e uma equação da forma:

$$m\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)=F_r(r) \qquad 16.19$$

16.4 Conservação do Momento Angular

As leis de conservação da energia e do momento angular desempenham um papel muito importante no estudo do movimento de partículas quando estas se movem sob a ação de uma força central.

Consideremos primeiramente a conservação do momento angular. A segunda equação de movimento expressa, na realidade, a conservação da componente z do momento angular, isto é:

$$L_z \equiv mr^2(t)\frac{d\varphi(t)}{dt}=L_0 \qquad 16.20$$

Isso tem uma consequência dinâmica, uma vez que a diferencial da variável φ é tal que

$$d\varphi = \frac{L_0}{mr^2}dt \qquad 16.21$$

E, como consequência, uma vez conhecida a distância até o centro de forças como função do tempo, podemos determinar o ângulo como função do tempo através da integral:

$$\boxed{\varphi(t) - \varphi(t_0) = \frac{L_0}{m}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{r^2(t')}dt'} \qquad 16.22$$

A outra consequência do fato de que o momento angular se conserva tem a ver com a **Lei das Áreas**.

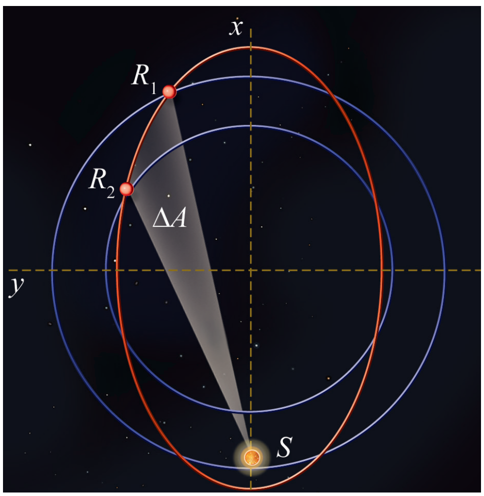

Figura 16.4: Área varrida pelo vetor posição.

Pode-se ver, da **Figura 16.4**, que um elemento infinitesimal da área varrida pelo vetor posição é dada pela área do triângulo da **Figura 16.4**, cujos lados são $rd\theta$ e r.

O valor dessa área infinitesimal é dado por:

$$dA = \frac{1}{2}r\left(rd\varphi\right) = \frac{1}{2}r^2 d\varphi \qquad 16.23$$

A taxa com que essa área muda com o tempo será, portanto:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt} \qquad 16.24$$

De **16.24** segue, portanto,que

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{L_o}{2m}} \qquad 16.25$$

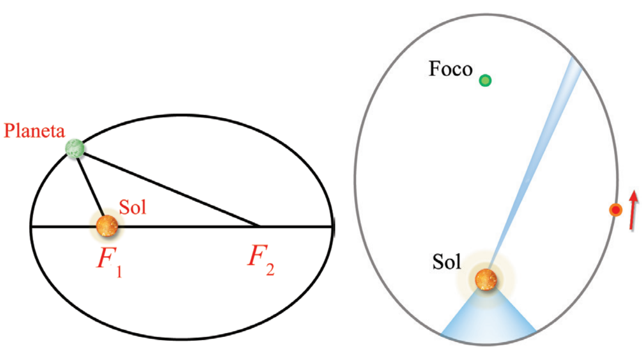

Figura 16.5: Lei das áreas.

Donde se infere que **para intervalos de tempos iguais, o raio vetor de posição varre áreas iguais.** Na realidade, de **16.25** concluímos mais geralmente que a taxa com que o raio vetor de posição varre áreas é constante com o tempo. A segunda lei é apenas uma das consequências da expressão **16.25**, a qual resulta da conservação do momento angular da partícula.

A lei das áreas se aplica a qualquer força central.

16.5 Energias positivas, negativas e nulas

A energia de uma partícula, sujeita a uma força central, pode assumir valores positivos, negativos ou ela pode ser nula. Consideremos, por exemplo, o lançamento de um projétil de massa m contra o campo gravitacional da Terra. A energia mecânica da massa (partícula) é:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\left(GM_{\text{Terra}}\right)m}{r}$$

No caso em que a energia for positiva, escrevemos:

$$E > 0 \qquad 16.26$$

Para energia positivas, o movimento de um objeto não é restrito a uma região finita no espaço. Note-se que se tomarmos na expressão **16.4** $r = \infty$, e levando em conta o potencial dado por **16.2**, não chegamos a qualquer inconsistência. Nesse caso, o valor de energia no infinito é aquele dado pelo valor da sua energia cinética quando a partícula estiver muito longe. A consequência disso é que uma partícula com energia positiva tem uma órbita hiperbólica. Nesse caso haveria um ponto de máxima aproximação do centro de forças. Seria um ponto de retorno ao longo da trajetória.

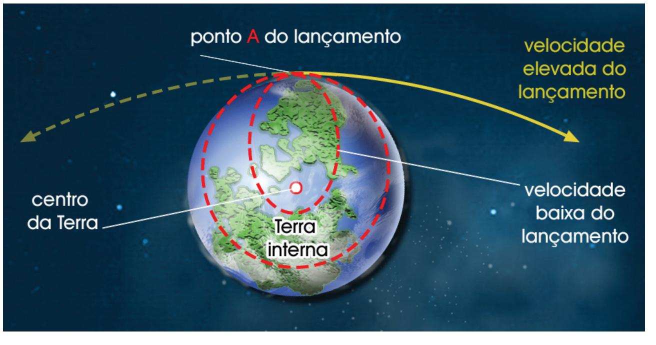

Figura 16.6: Quando a energia mecânica for positiva, a trajetória será um ramo de hipérbole.

No caso em que a energia for nula.

$$E = 0 \tag{16.27}$$

O movimento da partícula não é, igualmente, restrito a uma região finita do espaço. Isto é, ela pode atingir pontos a grandes distâncias do corpo que promove a atração gravitacional.

Esse caso difere do anterior pelo fato de que ao tomarmos $r \to \infty$, obtemos que

$$E = \frac{1}{2} M V_\infty^{\,2} = 0 \tag{16.28}$$

Ou seja, no infinito a partícula está em repouso. O caso de energia zero tem esse significado físico. A saber, quando a partícula está muito longe do centro da força gravitacional, ela se encontra em repouso.

A trajetória da partícula, no caso de energia nula, é uma parábola.

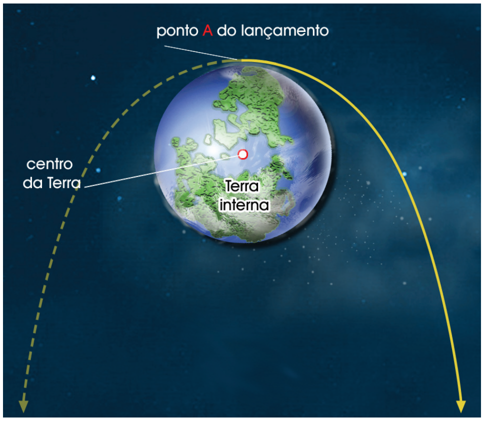

Figura 16.7: Trajetória parabólica ocorre quando a energia mecânica é nula.

O caso de energias negativas, isto é,

$$E < 0 \tag{16.29}$$

tem um significado físico bastante simples. Uma partícula sujeita a um campo gravitacional, e com energia negativa, não pode atingir um ponto no infinito.

De fato, de **16.4**, e levando em conta o potencial dado por **16.2**, vê-se que para $r \to \infty$ teríamos uma inconsistência, uma vez que nesse limite teríamos

$$E = \frac{m}{2}v^2 \qquad (16.30)$$

o que para $E < 0$ acarreta uma inconsistência. Portanto, atingir um ponto no infinito é impossível, independentemente do valor de v. Assim, energia negativa de uma partícula significa que o movimento da mesma é restrito a uma certa região do espaço.

Para energias negativas teríamos dois tipos de trajetórias: **trajetórias circulares** e **trajetórias elípticas**. Essas últimas são as trajetórias dos planetas em torno do Sol. As primeiras correspondem a trajetórias de alguns satélites que circulam em torno da Terra.

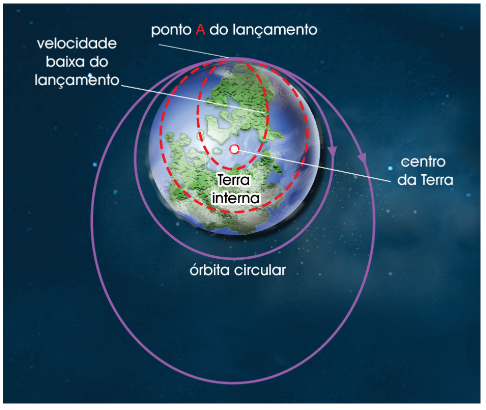

Figura 16.8: Trajetória elíptica, quando a energia mecânica for negativa.

16.6 Velocidade de Escape

A conservação da energia favorece enormemente a análise dos movimentos quando o corpo se encontra sob a ação da força gravitacional.

Ao atirarmos alguns objetos para cima (na direção vertical), verificamos que ele atinge uma altura máxima (h_{max}) na qual ele pára instantaneamente e depois volta. Se o objeto for atirado de uma altura h a partir da superfície terrestre com velocidade v_0 (na direção vertical) então sua energia no instante em que ele é atirado é dada por:

$$E = \frac{m}{2}v^2{}_0 - \frac{GmM}{R+h} \qquad (16.31)$$

No ponto no qual ele atinge a altura máxima (h_{max}), sua energia cinética será nula pois nesse ponto o objeto estará instantaneamente em repouso. Nessas circunstâncias, podemos escrever a energia:

$$E = -\frac{GmM}{R + h_{max}} \quad 16.32$$

Assim, no ponto no qual ele atinge a altura máxima, toda sua energia mecânica está sob a forma de **energia potencial**. Como a energia se conserva podemos escrever a seguinte igualdade:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM}{R+h} = -\frac{GmM}{R + h_{max}} \quad 16.33$$

De **16.33** concluímos que a altura máxima será obtida a partir da expressão:

$$\left(\frac{R+h}{R+h_{max}}\right) = 1 - v_0^2\left(\frac{R+h}{2GM}\right) \quad 16.34$$

Da expressão acima notamos que, à medida que v_0 for cada vez maior, tanto maior será a altura máxima atingida. O que, afinal, é um resultado bastante conhecido na prática. Podemos assim imaginar que para uma dada velocidade o objeto nunca mais retornará à terra.

A **velocidade de escape** é a velocidade mínima necessária para que o objeto vá para o infinito e sem qualquer chance de retorno. Isto é, objeto escapa para não mais voltar.

A condição de estar no infinito é equivalente a tomar o limite:

$$h_{max} \to \infty \quad 16.35$$

Dessa forma obtemos que a velocidade de escape para um objeto a uma altura h acima da superfície da Terra é dada por:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{(R+h)}} \quad 16.36$$

Para um objeto sobre a superfície a velocidade de escape é:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad 16.37$$

16.7 Órbitas

O problema das órbitas num campo de forças gravitacionais pode ser resolvido a partir da conservação da energia e da conservação do momento angular. A conservação da energia implica que, ao longo do movimento, utilizando as coordenadas polares, temos a seguinte identidade:

$$E = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) - \frac{mMG}{r} \quad 16.38$$

Utilizando agora a conservação do momento angular, a energia se escreve agora como função apenas da derivada de r com respeito ao tempo e da própria variável r. Obtemos explicitamente:

$$E = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L_0^2}{m^2 r^2}\right) - \frac{mMG}{r} \quad 16.39$$

Podemos agora interpretar a igualdade acima como uma equação diferencial para a variável r. A solução dessa equação diferencial nos levará a uma das curvas conhecidas como cônicas, ou secções cônicas. O tipo de cônica dependerá da energia da partícula. A órbita em qualquer caso dependerá dos valores da energia e do momento angular.

Levando-se em conta que a energia mecânica e o momento angular são conservados, podemos escrever:

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L_0^2}{2m}\frac{1}{r^2} + U(r) \quad 16.40$$

Outra forma de investigar a solução para as órbitas é por meio da conservação da energia. De fato, de **16.40** segue que a energia.

$$\frac{dr}{\sqrt{\left(E - \frac{L_0^2}{2m}\frac{1}{r^2} - U(r)\right)}} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}dt \quad 16.41$$

Utilizando a relação dada em **16.20**, temos que:

$$\frac{-d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\left(E-\frac{L_0^{\,2}}{2m}\frac{1}{r^2}-U(r)\right)}}=+\sqrt{\frac{L_0^{\,2}}{2m}}d\varphi \qquad 16.42$$

Fazendo agora outra mudança de variáveis, ou seja, definindo a variável $u = 1/r$ e integrando membro a membro a expressão acima, obtemos a solução para órbita a partir de uma integral que é fácil de efetuar em alguns casos, como no caso da força gravitacional. Tal integral é:

$$\varphi=\varphi_0-\int_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{\frac{2m\left(E-U(u)\right)}{L_0^{\,2}}-u^2}} \qquad 16.43$$

Esta é a solução para a órbita considerando uma força central a mais geral possível.

16.8 As Leis de Kepler

No caso de uma força central da forma **16.1**, a integral **16.43** se reduz à expressão:

$$\varphi=\varphi_0-\int_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L_0^{\,2}}+\frac{2mk}{L_0^{\,2}}u-u^2}} \qquad 16.44$$

onde k, no caso da força gravitacional, é dado por:

$$k = GmM \qquad 16.45$$

A integral acima se reduz a uma integral que pode ser encontrada em tabelas de integrais, ou efetuando manipulações simples. Essa integral é da forma:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arccos-\left(\frac{b+2ax}{\sqrt{\Delta}}\right) \qquad 16.46$$

Onde, no caso específico de uma força atrativa, temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{2mk}{L_0^{\,2}}\right)^2 \left(1 + \frac{2EL_0^{\,2}}{mk^2}\right) \qquad 16.47$$

Assim, a solução para a órbita é:

$$\varphi = \varphi_0 - \arccos \frac{\dfrac{L_0^{\,2}u}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \dfrac{2E^2L_0^{\,2}}{mk^2}}} \qquad 16.48$$

A qual, escrita em termos da variável r, assume a forma da equação descrevendo uma cônica. Isto é:

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{L_0^{\,2}}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL_0^{\,2}}{mk^2}}\cos(\varphi - \varphi_0)\right) \qquad 16.49$$

Donde inferimos que a excentricidade depende de uma forma simples do sinal da energia.

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\,L_0^{\,2}}{mk^2}} \qquad 16.50$$

Para energias negativas, mas, tais que

$$E \geq -\frac{mk^2}{2L_0^{\,2}} \qquad 16.51$$

a órbita será uma elipse. Vê-se que de **16.49** obtemos nesse caso a segunda lei de Kepler.

Vemos de **16.49** e de **16.50** que o semi-eixo maior definido como:

$$a = \frac{r^+ + r^-}{2} = \frac{L_0^{\,2}}{mk}\left(\frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon}\right) \qquad 16.52$$

se escreve como:

$$a\left(1 - \varepsilon^2\right) = \frac{L_0^{\,2}}{mk} \qquad 16.53$$

Portanto, tendo em vista que a excentricidade é expressa em termos da energia da partícula de acordo com a expressão **16.50**,vemos que o semi-eixo maior é, essencialmente, uma função da energia. Ele decresce com a energia de acordo com a expressão:

$$a = -\frac{k}{2E} \tag{16.54}$$

Tendo em vista a expressão para o semi-eixo menor em função do semi-eixo menor, temos que:

$$b = a^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{L_0^{\,2}}{mk}} \tag{16.55}$$

Lembrando que a área de uma elipse em termos do eixo maior e do eixo menor é dada por:

$$A = \pi ab \tag{16.56}$$

E utilizando a lei das áreas, obtemos a relação:

$$\pi ab = \frac{L_o}{2m}T \tag{16.57}$$

Donde obtemos, a partir de **16.56**, a terceira lei de Kepler:

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{GM}a^3 \tag{16.58}$$

Para energias positivas, a órbita é uma hipérbole. O ponto de máxima aproximação é aquele que satisfaz a equação:

$$E = \frac{L_0^{\,2}}{2m}\frac{1}{r_0^{\,2}} - \frac{k}{r_0} \tag{16.59}$$

Quando a energia é nula, a trajetória é uma parábola, e a máxima aproximação da partícula é dada pela expressão acima, tomando-se a energia igual a zero. Tem-se nesse caso que:

$$r_0 = \frac{L_0^{\,2}}{2mk} \tag{16.60}$$

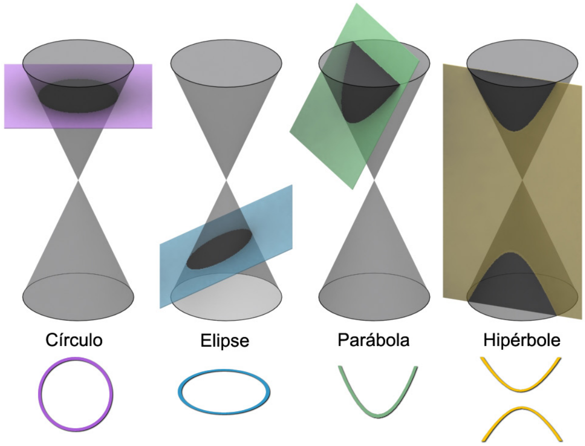

Figura 16.9: As várias cônicas.

16.9 A velocidade radial: Afélio e Perihélio

De acordo com a expressão **16.40**, a velocidade radial de um corpo celeste orbitando em torno do Sol é dada por:

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L_0^2}{2m}\frac{1}{r^2} + \frac{GmM}{r}\right)} \qquad 16.61$$

Assim, a partir da expressão **16.61** podemos concluir que a velocidade radial de um corpo celeste, como um planeta, aumenta (caso associado ao sinal positivo da expressão **16.61**) quando este se aproxima do Sol (associados a valores de r cada vez menores). O ponto de máxima aproximação (o perihélio) é marcado por uma inflexão no sinal da velocidade. A velocidade radial se anula nesse ponto. Ou seja:

$$\frac{dr}{dt} = 0 \qquad 16.62$$

Daí resultando que o **perihélio**, r_-, que é o ponto de máxima aproximação, é dado por:

$$E - \frac{L_0^2}{2m}\frac{1}{r_-^2} + \frac{GmM}{r_-} = 0 \qquad 16.63$$

quando tomamos a raiz de menor valor dessa equação de segundo grau. Obtemos:

$$r^{-} = \frac{L_0^{\ 2}}{m^2 GM}\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right) \quad 16.64$$

No entanto, a velocidade radial se reduz quando da aproximação do ponto de máximo afastamento (o **afélio**). Nessa fase, utilizamos o sinal (−) da expressão **16.61**.

Ao atingir o ponto de máximo afastamento, r_{+}, a velocidade radial se anula. Assim, esse valor da distância até o Sol pode ser determinado a partir da equação **16.63**, tomando agora a raiz de maior valor dessa equação de segundo grau. Obtemos assim:

$$r^{+} = \frac{L_0^{\ 2}}{m^2 GM}\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right) \quad 16.65$$

Como regra geral, o mesmo se aplica a qualquer força central. A velocidade radial aumenta em certos intervalos de tempo e diminuem em outros. Nos pontos de retorno, nos quais a velocidade radial se inverte, o móvel tem uma velocidade radial nula e isso nos permite determina-los por meio de uma equação análoga a **16.63**.

16.10 O Efeito do Momento Angular: O Potencial Efetivo

Se a força gravitacional é sempre atrativa, porque os planetas não caem em direção ao Sol?

A resposta a essa pergunta tem a ver com o momento angular de um objeto, como um cometa ou um planeta, ou ainda os meteoritos quando sujeitos à ação do Sol. Para entendermos isso, consideremos os dois últimos termos de **16.40** a qual nos dá a energia de um planeta de massa m sob a ação do potencial gravitacional produzido pelo Sol (admitido como tendo massa M). Estes termos definem o potencial dito efetivo o qual se escreve como:

$$U^{ef}(r) = \frac{L_0^{\ 2}}{2m}\frac{1}{r^2} - \frac{GmM}{r} \quad 16.66$$

O primeiro termo do potencial efetivo (**16.66**) está associado ao momento angular do objeto que se encontra sob o efeito da gravitação provocada pela sua interação com o Sol. O gráfico desse potencial, dito efetivo, é apresentado a seguir (**Gráfico 16.1**).

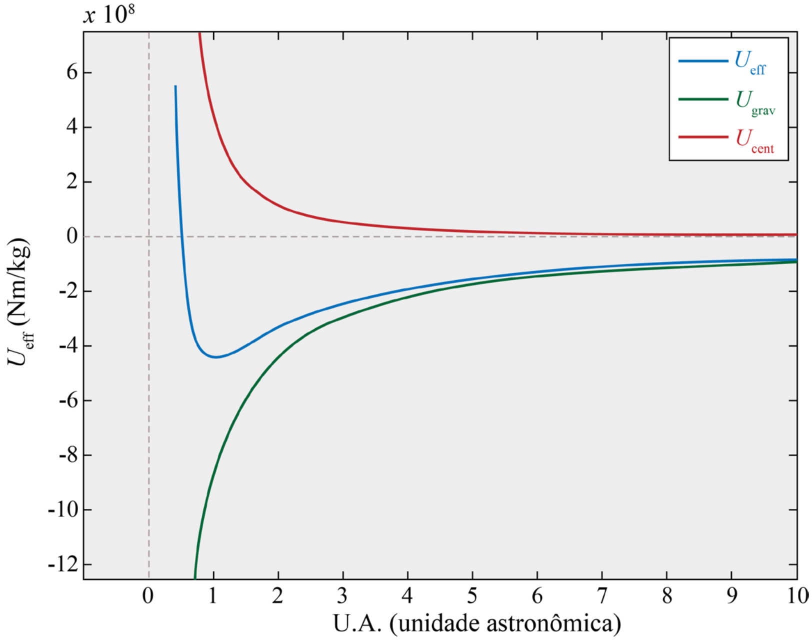

Gráfico 16.1: A energia Potencial efetiva de um planeta depende da distância até o centro de forças. Ela é a soma (representada pela cor azul) da energia potencial gravitacional (cor verde) mais o potencial centrífugo (cor vermelha).

Observando o Gráfico de cor vermelha em **16.1**, percebemos que o efeito do momento angular é gerar um potencial repulsivo, não permitindo assim que um corpo celeste se aproxime e colida com o Sol. Ele só pode chegar até uma distância mínima conhecida como periélio.

Se, por outro lado o momento angular for nulo, teríamos apenas o efeito da força gravitacional (em verde no **Gráfico 16.1**). Nesse caso ela cai em direção ao centro de forças. No caso dos planetas isso equivale a cair em direção ao Sol. Ou seja, objetos não dotados de momento angular não orbitam. Caem, simplesmente.

Agora é sua vez...

Acesse o Ambiente Virtual de Aprendizagem e realize a(s) atividade(s) proposta(s).