FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

TÓPICO 6

Gil da Costa Marques

6.1 Potência de Expoente Real

Os arqueologistas lograram êxito em encontrar cerca de meio milhão de tabulas de argila na região da Mesopotâmia. Por meio delas descobrimos que a civilização que ali habitou em tempos tão remotos quanto 2000 anos antes de Cristo já tinha conhecimento da operação de potenciação. De fato, algumas tabulas contêm tábuas exibindo valores de a^n para n de 1 até 10 e para valores de a relativamente grandes (até $a = 225$) .

Podemos generalizar a operação definida no início do tópico 4 (considerada apenas para números reais z inteiros e positivos) para qualquer número real. Considerando-se a como um número real positivo e z um número real qualquer, definimos o número b, denominado potência de expoente real, como:

$$b = a^z \quad a, z \in R \tag{6.1}$$

Note-se que para $z = -1$, estamos definindo, de **6.1**, o número inverso de a.

Para $z = ½$, a potência de exponente real é a raiz quadrado do número a. Ou seja,

$$b = \sqrt{a} \tag{6.2}$$

Trata-se portanto de ampliar o conceito de potenciação de um número, para incluir potências de números reais. Assim, conquanto

$$b = 4^2 \quad \text{e} \quad c = 4^{\frac{1}{2}} \tag{6.3}$$

Obtemos, por definição,

$$b = 16 \quad \text{e} \quad c = 2 \tag{6.4}$$

A extensão da operação de potenciação para qualquer número real nos permite introduzir, como já o fizemos para os números inteiros e positivos, as funções de expoente real as quais podem ser escritas sob a forma geral:

$$\boxed{f(x) = x^z} \quad (x > 0) \tag{6.5}$$

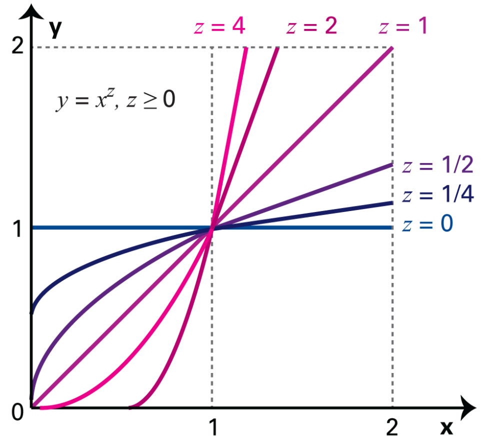

Figura 6.1 Gráficos de funções de expoente real para valores inteiros e positivos do expoente. / Fonte: Cepa

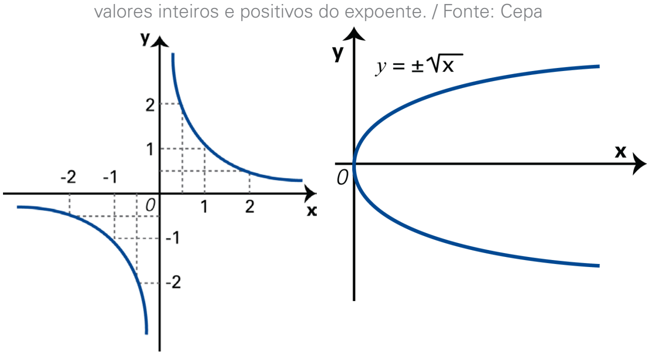

Figura 6.2: (a) Gráfico da função $f(x) = x^{-1}$ e **(b)** gráfico da função $f(x) = \pm\sqrt{x}$. / Fonte: Cepa

Considere, por exemplo, a função

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \qquad 6.6$$

Assim, podemos construir uma tabela o seguinte conjunto de valores para f.

$x = 0$	$f(0) = 0$
$x = 1$	$f(1) = 1$
$x = 4$	$f(4) = 2$
$x = 9$	$f(9) = 3$
$x = 16$	$f(16) = 4$

Gráficos de funções de expoente real dependem fortemente da potência z. Como regra geral, elas são crescentes para o eixo positivo se $z > 0$, e são decrescentes no mesmo intervalo no caso de $z < 0$.

A **Figura 6.2** apresenta os gráficos das funções $f(x) = x^{-1}$ e $f(x) = \pm\sqrt{x}$.

6.2 Funções inversas

Funções de expoente real podem ser utilizadas para ilustrar o conceito de função inversa de uma forma relativamente simples. Para ilustrar isso, consideremos a função $f(x) = x^z$. Ela tem como função inversa a função cujo expoente real é o inverso do expoente real de $f(x)$. Isto é:

$$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{z}}, \quad z \neq 0 \qquad 6.7$$

De fato, pode-se facilmente verificar que

$$f \circ f^{-1}(x) = \left(f^{-1}(x)\right)^z = \left(x^{\frac{1}{z}}\right)^z = x^{\frac{z}{z}} = x \qquad 6.8$$

Assim, as funções $f(x) = x^2$ e $f'(x) = x^{1/2}$ são funções inversas uma da outra.

A função $f(x) = x$ e $f(x) = x^{-1}$ são as suas próprias funções inversas. Nesse caso escrevemos:

$$f^{-1}(x) = f(x) \tag{6.9}$$

Por exemplo, no último caso temos que

$$f \circ f^{-1}(x) = \left(f^{-1}(x)\right)^{-1} = \left(x^{-1}\right)^{-1} = x \tag{6.10}$$

6.3 Função exponencial

Numa das tabulas do Louvre, encontra-se um problema de Juros compostos. Nesse problema, formulado cerca de 1700 a.C., se procura determinar por quanto tempo devemos aplicar uma quantia, admitindo-se uma rentabilidade de 20% ao ano, para que ela dobre de valor. Vem, portanto, da Babilônia, o primeiro exemplo de uso da função exponencial.

A **função exponencial de base *a*** é a função $f(x)$ definida por:

$$\boxed{f(x) = a^x} \quad \begin{Bmatrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{Bmatrix} \tag{6.11}$$

Para valores de $a > 1$ essa função é sempre crescente. Para valores de $a < 1$, no entanto, ela é uma função decrescente.

Consideremos o caso da função exponencial de base 2. Nesse caso, escrevemos,

$$f(x) = 2^x \tag{6.12}$$

Para ilustrarmos o conceito de função de função exponencial, recorremos ao exemplo do Marajá, narrado no livro de Malba Tahan, que propôs a um dos seus súditos que como forma de pagamento de uma transação ele o pagasse de uma forma simples. No primeiro ano o súdito pagaria apenas um grão de trigo. No segundo ano ele pagaria míseros dois grãos de trigo. Duplicando, daí em diante, a cada ano o número de grãos até a última casa do tabuleiro.

Assim o número de grãos N seria dado em função do número de anos n seria expresso pela fórmula

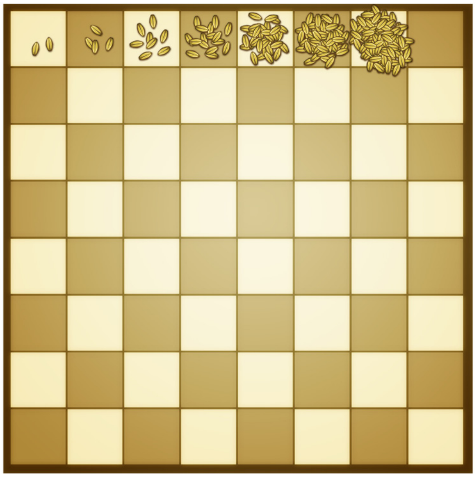

Figura 6.3: Ilustração da "Recompensa de Sessa", um conto de Malba Tahan, do livro *Lendas do oásis*. / Fonte: Cepa

$$N = 2^n \quad (6.13)$$

O súdito elaborou a **Tabela 6.1**, baseada em uns poucos anos:

Número de anos	Número de grãos de trigo
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128

Tabela 6.1: Número de grãos a cada ano, até o sétimo ano.

Para Pensar

Quantos grãos teriam depois de 20 anos? E depois de 40?

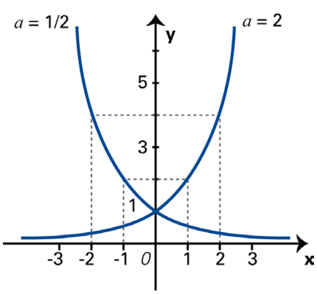

Figura 6.4: Gráficos típicos de funções inversas uma da outra. No caso, a função raíz quadrada e a função quadrática. / Fonte: Cepa

Conclui, acertadamente que depois de 8 anos deveria depositar na última casa da primeira fileira apenas 256 grãos. Uma bagatela, portanto. Não entendendo de funções exponenciais aceitou, para sua desgraça, essa forma de pagamento.

A função exponencial mais importante dentre todas, do ponto de vista científico, é a função exponencial do número e. Esse número, assim como o número π, é um dos números mais importantes das ciências. Ele será discutido ao término deste tópico. Assim, definimos a função exponencial de base e é a função:

$$f(x) = e^x \quad (6.14)$$

Mais usual na ciência, é a função exponencial dependente de dois parâmetros a e b, definida por:

$$f_1(x) = ae^{bx} \equiv a\left(e^b\right)^x \quad (6.15)$$

Igualmente importante são as funções da forma:

$$f_2(x) = Ae^{-bx} \quad (6.16)$$

Alguns gráficos das funções exponenciais envolvendo o número e são apresentados abaixo.

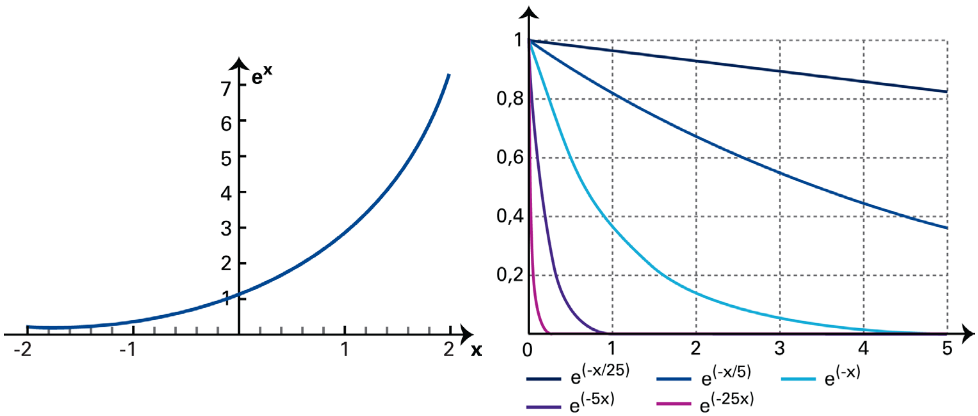

Figura 6.5: Gráficos de funções exponenciais envolvendo o número e. / Fonte: Cepa

Um bom exemplo da relevância da função exponencial de base e diz respeito ao decaimento de substâncias radioativas. Nesse caso, o número de átomos N que compõe uma determinada substância varia com o tempo (t)de acordo com a expressão:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (6.17)$$

Onde N_0 é número de átomos presentes no instante de tempo $t = 0$ e λ é uma constante característica do material e que recebe o nome de **constante radioativa**.

Definimos ainda funções exponenciais especiais tomando combinações de funções exponenciais. Por exemplo, definimos as funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico, como sendo dadas pelas combinações:

$$\mathrm{sen}hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cos hx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{6.18}$$

6.4 Funções logarítmicas

A descoberta dos logaritmos foi motivada pela procura de simplificações em expressões algébricas ou aritméticas complexas. Com eles podemos reduzir multiplicações, divisões e raízes a expressões contendo apenas somas de números.

Considere a determinação do número c que resulta da seguinte expressão:

$$c = \frac{(7{,}2)^{\frac{1}{15}}\, 4^{\frac{1}{5}}}{(14)^{\frac{3}{7}}} \tag{6.19}$$

Figura 6.6: John Napier, escocês, nasceu em 1550, morte em 4 de abril de 1617. / Fonte: Cepa

Antes da invenção do logaritmo de um número, tais contas davam um enorme trabalho. Ao criar um número denominado logaritmo de b, Napier procurava uma forma de simplificar as contas.

O logaritmo, agora designado por x, de um número b na base a (logaritmo de b com respeito a esse número), é o expoente a necessário para que se obtenha o número b. Ou seja,

$$b = a^x \tag{6.20}$$

Assim, levando-se em conta a definição, representamos esse número da seguinte forma:

$$x \equiv \log_a b \qquad \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases} \tag{6.21}$$

O raciocínio de John Napier para inventar o logaritmo de um número se baseava na procura de uma forma de associar os números de uma progressão geométrica

$$a, a^2, a^3, \cdots a^n, \cdots a^q, \cdots \tag{6.22}$$

Aos números da progressão aritmética,

$$1, 2, 3, \cdots m, \cdots n, \cdots \tag{6.23}$$

Essa associação seria tal que ao produto $a^m\ a^n$ de dois termos da progressão geométrica, esteja associado à soma de dois termos $m + n$ da progressão aritmética. Essa seria a simplificação introduzida quando do cálculo envolvendo produtos de dois números.

Assim, a propriedade mais notável da dos logaritmos de um número, por ser aquela que lhe deu origem, é que, dados dois números quaisquer

$$\begin{aligned} b_1 &= a^{x_1} \\ b_2 &= a^{x_2} \end{aligned} \tag{6.24}$$

Lembrando que

$$b_1 b_2 = a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2} \tag{6.25}$$

Então, levando-se em conta a propriedade acima, concluímos que o logaritmo do produto de dois números é igual à soma dos logaritmos desses números: Isto é:

$$\log_a\left(b_1 b_2\right) = \log_a\left(b_1\right) + \log_a\left(b_2\right) = x_1 + x_2 \tag{6.26}$$

É usual adotar-se uma convenção mediante a qual escrevemos os logaritmos na base 10 suprimindo-se a referencia a essa base. Assim, escrevemos:

$$\log x = \log_{10}\left(x\right) \tag{6.27}$$

Assim, podemos escrever, por exemplo,

$$\log(10.1000) = \log(10) + \log(1000) = 1 + 3 = 4 \quad 6.28$$

Da expressão acima, obtemos

$$\log_a (b)^p = p \log_a b \quad 6.29$$

E portanto, por exemplo, no caso da função logaritmo de base 10, podemos escrever:

$$\log_{10} (10)^p = p \log 10 = p \quad 6.30$$

E, portanto, para quaisquer dois elementos da progressão geométrica mencionada anteriormente, Napier encontrou o resultado:

$$\log_a \left(a^n a^m\right) = \log_a a^{n+m} = m + n \quad 6.31$$

Observe-se que da definição **6.21** encontramos que

$$\log_a 1 = 0 \quad 6.32$$

E que:

$$\log_a \left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a (b) \quad 6.33$$

Consideremos o exemplo anterior, resumido pela expressão **6.19**. Para calcularmos o número c, tomamos o logaritmo nesse número, por exemplo na base 10. Isso porque as tabelas mais difundidas, depois daquela dos logaritmos neperianos, foram tabelas na base 10. As mais utilizadas foram elaboradas por Briggs, contemporâneo de Napier. Tomando o logaritmo de c, encontramos

$$\log_{10} c = \frac{1}{15}\log_{10}(7,2) + \frac{1}{5}\log_{10}(4) - \frac{3}{7}\log_{10}(14) \quad 6.34$$

A solução agora envolve recorrer a tabelas para logaritmos.

Napier passou cerca de 20 anos desenvolvendo os logaritmos bem como escrevendo tabelas para os seus logaritimos, uma vez que afinal, muitas vezes as contas envolvem o processo inverso (conhecer um número dado o seu logaritmo).

6.5 Função Logarítmica Como Função Inversa

Definimos a função logaritmo de base a como a função:

$$\boxed{f(x) = \log_a x} \text{ para } \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ x > 0 \end{cases} \tag{6.35}$$

a qual associa a um número real positivo, o seu logaritmo na base a.

Muitas vezes essa função é definida como a função inversa da função exponencial. De fato, pode-se verificar que se escrevermos a função logarítmica como a função inversa da função $g(x)$,

$$g^{-1}(x) = \log_a x \tag{6.36}$$

é fácil verificar que

$$g(x) = a^x \tag{6.37}$$

E isso porque, pela definição da função logarítmica, segue que:

$$\left(g^{-1} \circ g(x)\right) = \log_a\left(g(x)\right) = \log_a\left(a^x\right) = x \tag{6.38}$$

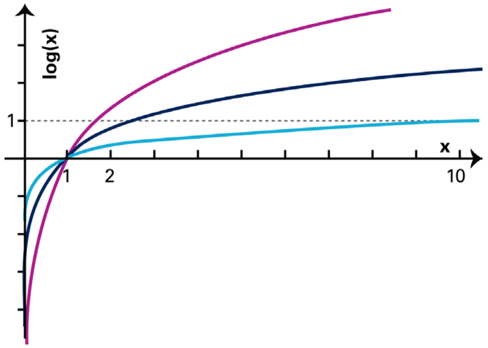

Figura 6.7: Gráficos típicos das funções logarítmicas. / Fonte: Cepa

gráficos da função logarítmica são apresentados na **Figura 6.7**. É importante ressaltar que a função logaritmo assume valores negativos quando a variável independente assume valores menores do que a base.

Os logaritmos de base 10 são conhecidos como logaritmos comuns, ou Briggsianos. Henry Briggs foi o proponente dessa base, durante muito tempo a mais difundida e objeto de várias tabelas de logaritmos. A mais utilizada na física é baseada num número também descoberto por Napier, o número *e*.

6.6 O Número de Napier (o número *e*)

Consideremos um número muito próximo de 1, ao qual designaremos por n_1. Consideremos o caso em que ele seja uma função de n, um número inteiro, real e positivo, da seguinte forma:

$$n_1(n) = 1 + \frac{1}{n} \tag{6.39}$$

Onde o número n será considerado como sendo um número grande. Por exemplo, consideremos os casos associados aos valores:

$$n = 10,\ \ 10^2,\ \ 10^3,\ \ 10^4, \cdots\ 10^{10}. \tag{6.40}$$

Para tais casos, encontramos:

$$n_1 = 1{,}1 \quad 1{,}01 \quad 1{,}001 \ \ 1{,}0001, \cdots\ 1{,}0000000001. \tag{6.41}$$

Consideremos agora números definidos pela potenciação do número n_1, definido por:

$$\left(n_1(n)\right)^n \equiv \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{6.42}$$

Estes números, para os valore de n dados em **6.42**, são:

$$2{,}5937.. \quad 2{,}7048.. \quad 2{,}7169.. \ \ 2{,}7184 \cdots . \tag{6.43}$$

O número e é definido como aquele para o qual podemos escrevê-lo com uma aproximação cada vez melhor quanto maior for o número n. Formalmente, escrevemos:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad 6.44$$

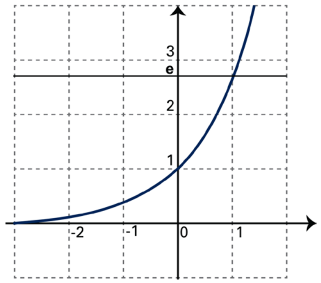

Figura 6.8: Gráfico da função exponencial de base e. / Fonte: Cepa

6.7 Curta História do número e e dos Logaritmos Neperianos

Com o intuito de resolver o problema apresentado no inicio da seção sobre logaritmos (a seção anterior), Napier fez um raciocínio interessante. Considerou uma solução na qual o valor de a da progressão geométrica diferisse pouco do caso trivial, no qual $a = 1$. Pensou numa progressão geométrica de tal forma que o número a se diferenciasse pouco do número 1. Escolheu $a = 0{,}9999999$, o qual se pode escrever, dentro de uma boa aproximação, como:

$$a = 1-10^{-7} \cong \frac{1}{1+10^{-7}} \quad 6.45$$

Em seguida, procurou escrever um número N, começando pelos inteiros, de tal forma que esse número pudesse ser escrito como o produto de um número grande (10^7) vezes um número L tal que, quando o número $a = 0{,}9999999$ fosse elevado a uma potência L daí resultaria um número qualquer, inclusive um número pequeno. Escreveu assim:

$$N = 10^7\left(\frac{1}{1+10^{-7}}\right)^L = 10^7\left(0{,}9999999\right)^L \quad 6.46$$

Percebeu assim, grosso modo, que qualquer número poderia ser escrito como potencias de a. Lembramos que sua primeira escolha foi tal que o valor desse número a é muito próximo de 1. Assim, números próximos de 1 requerem um valor de L pequeno. No entanto, à medida que nos afastamos do valor 1 esta escolha nos leva a valores, de L, extremamente grandes, em módulo. Considere, por exemplo, o valor de $L = -10^7$. O número a ele associado, é o número e de Napier:

$$e = \left(1+10^{-7}\right)^{10^7} \cong 2{,}7182818 \quad 6.47$$

Napier definiu L como o logaritmo do número N. A escolha feita por Napier, do fator 10^7 se deve á necessidade de evitar decimais. Observe-se que dividindo-se tanto N como L pelo fator já mencionado obtemos de **6.46**

$$\frac{N}{10^7}=\left[\left(\frac{1}{1+10^{-7}}\right)^{10^7}\right]^{\frac{L}{10^7}} \quad 6.48$$

Donde obtemos um sistema de logaritmos na base $1/e$ onde e é um número, o número de Napier o qual se pode identificar, a partir de **6.48**, como sendo dado por:

$$\frac{1}{e}=\left(\frac{1}{1+10^{-7}}\right)^{10^7}=\left(1+10^{-7}\right)^{-10^7} \quad 6.49$$

Napier descobriu assim, um número que dentro de boa aproximação é dado por **6.47**. Sua definição mais exata envolve grandes números, como previsto por Napier. A melhor definição desse número, também conhecido como número de Euler (que o popularizou), é:

$$\frac{1}{e}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n \quad 6.50$$

Definimos a função logaritmo natural (ln) como a função logaritmo de base e. Ou seja,

$$\boxed{f(x)=\ln x\equiv\log_e x} \quad 6.51$$

Sua função inversa é a função exponencial de base e

$$\boxed{f(x)=e^x} \quad 6.52$$

Os logaritmos neperianos, aqueles inventados por Napier muitas vezes são confundidos como os logaritmos naturais, aqueles definidos acima. A rigor isso não é verdade, uma vez que os logaritmos originais de Napier têm mais a ver com logaritmos definidos na base $1/e$. Os logaritmos neperianos são definidos por:

$$\frac{Nap(\log x)}{10^7} = \log_{1/e}\left(\frac{x}{10^7}\right) \tag{6.53}$$

O nome logaritmo foi cunhado por Napier, ao procurar dar a ele a conotação de "número da razão". Isso porque Logos em grego significa razão.