# FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS 8 TÓPICO

Gil da Costa Marques

# 8.1 Trigonometria nos Primórdios

Por alguma razão, o número 60 tinha um apelo místico para os babilônios. Como resultado, cerca de 2.000 anos antes da era cristã, já propunham um sistema de numeração cuja base era esse número. Tal sistema tornou-se conhecido como sexagesimal, uma vez que a base escolhida por eles era o número 60, ou seja, nesse sistema qualquer número poderia ser expresso como potências de 60 multiplicadas por constantes adequadas. Os Babilônios propuseram a divisão da circunferência de um círculo em 360 partes iguais, daí resultando a unidade de medida de ângulo conhecida como grau.

Hiparco (Circa 140 a.C.) recebe o crédito por ter iniciado a trigonometria, ou melhor, ele introduziu, de forma indireta, o conceito de seno de um ângulo. Hiparco era pesquisador no museu de Alexandria, a primeira instituição científica financiada pelo poder público. Transformou-se num dos maiores astrônomos da Antiguidade. Sua principal contribuição à matemática teve uma influência da matemática dos babilônios. Credita-se a ele a introdução, nos meios científicos relevantes na época, da medida de ângulo proposta pelos babilônios. Introduziu a função seno utilizando o número 60.

Considerando-se dois pontos ($P_1$, $P_2$), ambos localizados sobre uma circunferência, é possível construir um segmento de reta entre esses dois pontos (vide **Figura 8.1**). Hiparco definia corda (*Crd*) como o comprimento desse segmento. Para medi-lo, Hiparco introduzia uma unidade de comprimento que dependia do raio da circunferência. Para isso, dividia o raio da circunferência em 60 partes iguais.

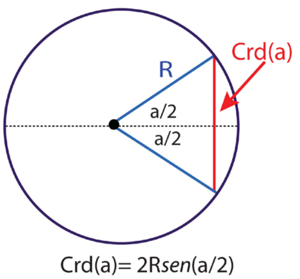



**Figura 8.1:** Definição de Corda associada a um ângulo. / Fonte: Cepa

Se traçarmos duas semirretas a partir da origem, passando pelos dois pontos, $P_1$ e $P_2$, podemos agora introduzir o ângulo *a* medindo a inclinação dessas semirretas. Claramente, a corda depende desse ângulo. Temos assim:

$$Crd = Crd\left(a\right) \quad (8.1)$$

A corda pode ser, nesse contexto, entendida como função do ângulo *a*.

Adotando-se a unidade de medida proposta por Hiparco, a função seno, como é definida nos dias de hoje, se relaciona com a função comprimento de acordo com a expressão:

$$\text{sen}\,\frac{a}{2} = \frac{Crd(a)}{2R} \rightarrow \text{sen}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{Crd(a)}{120} \qquad 8.2$$

Se escrevermos a corda como sendo dada por

$$Crd(a) = 2l \qquad 8.3$$

e utilizando o valor do raio sem especificar a unidade de medida, a função seno, definida a partir da função corda, é dada por:

$$\text{sen}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{l}{R} \qquad 8.4$$

A rigor, Hiparco não estava introduzindo a função seno. Ele definia o que denominamos seno de um ângulo. Tal definição é análoga àquela obtida a partir das relações métricas de ângulos agudos.

Hiparco gerou uma tabela de cordas. Essa tabela é muito semelhante a uma tabela dos senos, desde que nos atenhamos a ângulos menores do que 180°. A fim de determinar a posição dos corpos celestes, Hiparco teve a ideia de fazer a interpolação para gerar algo como a "função corda".

Ptolomeu publicou, em sua obra *O Almagesto*, uma tabela de cordas para ângulos variando dentro de intervalos de 0,5°.

## 8.2 Relações Trigonométricas num Triângulo Retângulo

Um triângulo retângulo é uma figura plana de três lados formados por segmentos de reta de tal forma que o ângulo entre dois lados é igual a 90° (dois são segmentos perpendiculares entre si).

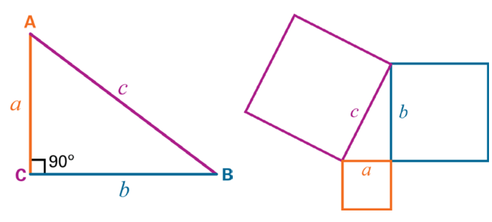



**Figura 8.2:** Lados e vértices do triângulo retângulo. / Fonte: Cepa

Para cada um dos ângulos cujos valores não excedem 90° (ou seja, π/2 rad), podemos definir o valor do seu seno, cosseno, sua tangente, cotangente, secante e cossecante a partir de relações simples entre os lados de um triângulo retângulo.

Consideremos um triângulo retângulo cujos lados serão designados por $a$, $b$ e $c$. Os ângulos opostos a esses lados serão designados, respectivamente, por $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Pressupomos que o lado $c$ seja a **hipotenusa** do triângulo retângulo. O ângulo oposto a ela designado por $\hat{C}$ tem, portanto, 90°. A hipotenusa é, por definição, o maior lado do triângulo retângulo, e por isso é fácil reconhecê-lo visualmente.

Tendo em vista que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, obtemos a seguinte relação entre os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi \quad \Rightarrow \quad \hat{A}=\frac{\pi}{2}-\hat{B} \tag{8.5}$$

No caso de um triângulo retângulo, vale o teorema de Pitágoras, ou seja, vale a relação:

$$a^2+b^2=c^2 \tag{8.6}$$

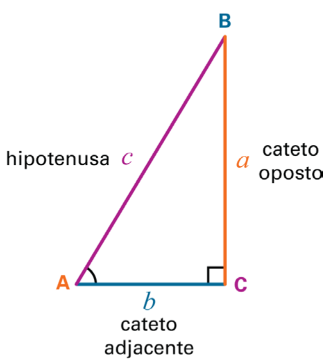



**Figura 8.3:** Lados de um triângulo retângulo. / Fonte: Cepa

Considerando-se o ângulo $\hat{A}$, por exemplo, o lado que é oposto a ele tem o nome de **cateto oposto** (o lado $a$), enquanto o lado adjacente a ele, e diferente da hipotenusa (o lado $b$), é denominado **cateto adjacente** a esse ângulo. Observe que, considerando-se agora o ângulo $\hat{B}$, o lado $b$ é o seu cateto oposto enquanto o lado $a$ é o seu cateto adjacente.

A partir da notação acima, podemos definir o seno de um ângulo qualquer do triângulo retângulo como sendo dado pela relação do seu cateto oposto dividido pela hipotenusa:

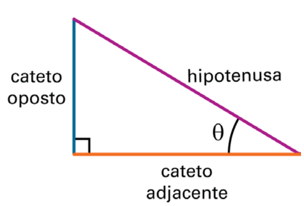



**Figura 8.4:** Seno de um ângulo do triângulo retângulo. / Fonte: Cepa

$$\boxed{\operatorname{sen}\theta=\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}} \tag{8.7}$$

Da definição acima obtemos:

$$\text{sen}\hat{A} = \frac{a}{c} \qquad \text{sen}\hat{B} = \frac{b}{c} \qquad \text{sen}\hat{C} = \ \text{sen}\frac{\pi}{2} = \frac{c}{c} = 1 \tag{8.8}$$

Definição análoga se aplica ao valor do cosseno dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ do triângulo retângulo, ou seja:

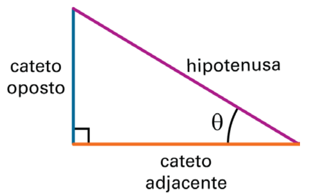



Figura 8.5: Cosseno de um ângulo do triângulo retângulo. / Fonte: Cepa

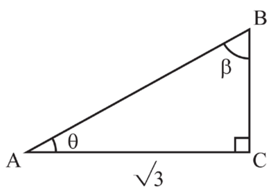
$$\boxed{\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}} \tag{8.9}$$

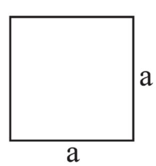
A definição acima não se aplica ao lado $\hat{C}$, uma vez que ele tem dois catetos adjacentes. Assim, o valor do cosseno do ângulo $\theta = \pi/2$ será determinado de outra forma. Para os lados $\hat{A}$ e $\hat{B}$, temos, de acordo com a definição **8.9**:

$$\cos\hat{A} = \frac{b}{c} \qquad \cos\hat{B} = \frac{a}{c} \tag{8.10}$$

## Exercício resolvido

A partir do triângulo retângulo *ABC* e do quadrado de lado *a* da figura a seguir, preencha as lacunas da tabela 1:

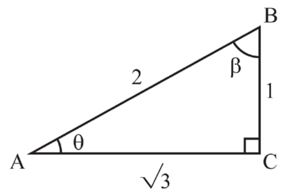


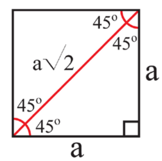




| | $\theta$ | $\beta$ | $45°$ |
|---|---|---|---|
| **Seno** | | | |
| **Cosseno** | | | |

→Resolução:

Pelo teorema de Pitágoras, pode-se calcular a hipotenusa de cada triângulo e, em seguida, os valores que preenchem a tabela:




$$h^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2$$
$$h^2 = 3 + 1$$
$$h^2 = \sqrt{4} \text{ ou } (-\sqrt{4} : \text{não convém})$$
$$h = 2$$

$$h^2 = a^2 + a^2$$
$$h^2 = 2a^2$$
$$h = a\sqrt{2} \text{ ou } (-a\sqrt{2} : \text{não convém})$$

Portanto, para o triângulo $ABC$, temos:

$$\text{sen}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen}\beta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \cos\beta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{2}$$

E para o triângulo retângulo isósceles, formado pelos lados e pela diagonal do quadrado, tem-se que:

$$\text{sen}45° = \cos 45° = \frac{a}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Preenchendo os dados na tabela 1:

| | θ | β | 45° |
|---|---|---|---|
| **Seno** | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| **Cosseno** | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |

sen $\theta = \cos \beta$, pois $\theta$ e $\beta$ são ângulos complementares, ou seja, $\theta + \beta = 90°$.

## 8.2.1 Propriedades dos Cossenos e Senos

Uma propriedade notável do cosseno e seno de um ângulo qualquer é facilmente derivado a partir do teorema de Pitágoras. De fato, se tomarmos para os valores do seno e do cosseno do angulo $\hat{A}$ as expressões **8.8** e **8.10**, e, em seguida, somarmos os valores dos seus respectivos quadrados, obteremos:

$$\operatorname{sen}^2\hat{A}+\cos^2\hat{A}=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2} \tag{8.11}$$

Utilizando o teorema de Pitágoras (**8.6**), resulta de **8.11** que, para qualquer ângulo, vale a relação:

$$\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1 \tag{8.12}$$

De **8.8** e **8.12** obtemos:

$$\cos\frac{\pi}{2}=0 \tag{8.13}$$

Tendo em vista a relação **8.5** entre os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ do triângulo retângulo, e a partir das definições **8.7** e **8.9**, concluímos que:

$$\operatorname{sen}\hat{A}=\frac{a}{c}=\cos\hat{B}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\hat{A}\right) \tag{8.14}$$

Assim, para um ângulo qualquer, valem as relações:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\theta&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\ \cos\theta&=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\end{aligned} \tag{8.15}$$

Sendo $\theta_1$ e $\theta_2$ dois valores arbitrários da variável $\theta$, valem as seguintes relações com referência ao seno e ao cosseno da soma:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)&=\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2+\operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1\\ \cos(\theta_1+\theta_2)&=\cos\theta_1\cos\theta_2-\operatorname{sen}\theta_2\operatorname{sen}\theta_1\end{aligned} \tag{8.16}$$

Essas duas últimas propriedades serão enunciadas sem, no entanto, apresentar uma demonstração.

## 8.2.2 Outras Relações Simples

A partir da definição dos catetos opostos e adjacentes relativos a cada ângulo, podemos definir outros valores associados a ângulos. Assim, definimos as tangentes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$, aqui representados genericamente como ângulos θ, como o seguinte quociente entre catetos:

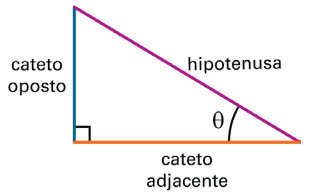



**Figura 8.6:** Tangente de um ângulo do triângulo retângulo. / Fonte: Cepa

$$\boxed{\text{tg}\theta \equiv \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}} \tag{8.17}$$

Temos assim que, no triângulo retângulo, definimos as tangentes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$, em termos dos catetos, como:

$$\text{tg}\hat{A} \equiv \frac{a}{b} \qquad \text{tg}\hat{B} \equiv \frac{b}{a} \tag{8.18}$$

Definimos a cotangente do ângulo como o inverso da função tangente:

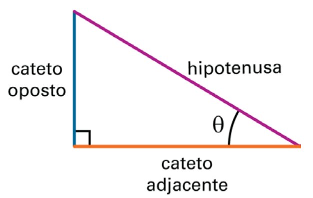



**Figura 8.7:** Cotangente de um ângulo do triângulo retângulo. / Fonte: Cepa

$$\boxed{\text{cotg}\theta \equiv \frac{1}{\text{tg}\theta} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}} \tag{8.19}$$

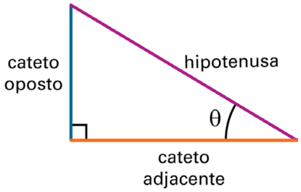
Temos assim que as cotangentes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são dadas, em termos dos catetos $a$ e $b$, por:

$$\text{cotg}\hat{A} \equiv \frac{b}{a} \qquad \text{cotg}\hat{B} \equiv \frac{a}{b} \tag{8.20}$$

Definimos ainda o valor da secante de um ângulo como o inverso da função cosseno. Temos, pois,

$$\boxed{\sec\theta \equiv \frac{1}{\cos\theta}} \tag{8.21}$$

o que implica a seguinte definição em termos dos catetos e hipotenusa:



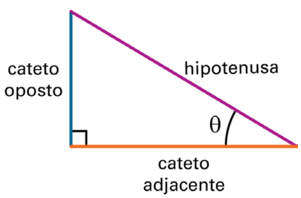

$$\boxed{\sec\theta \equiv \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}} \tag{8.22}$$

**Figura 8.8:** Secante de um ângulo do triângulo retângulo. / Fonte: Cepa

Assim, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ assumem os seguintes valores da secante:

$$\sec\hat{A} \equiv \frac{c}{b} \qquad \sec\hat{B} \equiv \frac{c}{a} \tag{8.23}$$

ao passo que definimos a função cossecante como o inverso da função seno:




$$\boxed{\text{cossec}\,\theta \equiv \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}}} \tag{8.24}$$

**Figura 8.9:** Cossecante de um ângulo do triângulo retângulo. / Fonte: Cepa

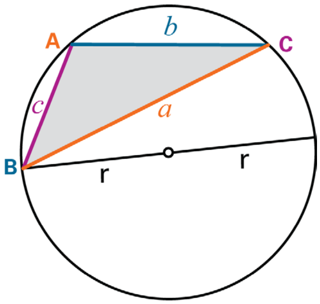
Consequentemente, os valores da cossecante dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são dados por:

$$\text{cossec}\,\hat{A} \equiv \frac{c}{a} \qquad \text{cossec}\,\hat{B} \equiv \frac{c}{b} \tag{8.25}$$

Conclui-se que, num triângulo retângulo, podemos definir diferentes valores associados a ângulos, valores esses que envolvem quocientes entre catetos e/ou hipotenusa.

## 8.2.3 Lei dos Senos e dos Cossenos

A partir de **8.7** podemos verificar facilmente a lei dos senos.




$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} = 2r \qquad 8.26$$

**Figura 8.10:** Lei dos Senos. / Fonte: Cepa


Lei dos Cossenos

$\boxed{x = c \cdot \cos \hat{A}}$ → **(1)**

$\boxed{x^2 + h^2 = c^2}$ → **(2)**

$(b-x)^2 + h^2 = a^2 \Rightarrow \boxed{b^2 - 2bx + x^2 + h^2 = a^2}$ → **(3)**

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C} \end{aligned}} \qquad 8.27$$

Substituindo **(1)** e **(2)** em **(3)** temos

$$b^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} + c^2 = a^2 \Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}}$$

**Figura 8.11:** Lei dos Cossenos. / Fonte: Cepa

# 8.3 Coordenadas Cartesianas no Plano

A melhor forma de introduzir as funções trigonométricas é fazer uso de um sistema de coordenadas cartesiano no plano.

Um sistema cartesiano é baseado na escolha de um ponto de referência, ao qual damos o nome de ponto de origem (ou simplesmente 0) do sistema de referência, e em dois eixos ortogonais entre si passando por esse ponto. Em seguida, orientamos esses eixos. Tais eixos são designados por $x$ (o eixo horizontal) e $y$ (o eixo vertical).

Um ponto $P$ no plano tem sua posição caracterizada pelas suas coordenadas cartesianas $(x, y)$. Elas são determinadas da seguinte forma: traçamos, a partir de $P$, duas retas paralelas aos eixos, as quais indicamos por retas tracejadas, até elas encontrarem os eixos $Ox$ e $Oy$, respectivamente. Esses pontos de encontro das retas tracejadas com os eixos definem as coordenadas cartesianas da posição do corpo. Convencionou-se que o valor da coordenada $x$ do ponto $P$ será igual à distância desse ponto de encontro até a origem se $P$ estiver no sentido da flecha a partir da origem. Caso contrário, o valor da coordenada é igual à distância precedida de um sinal menos, isto é, as coordenadas terão valores negativos quando o ponto $P$ estiver no sentido oposto ao da flecha a partir da origem. A mesma regra se aplica para a coordenada $y$.

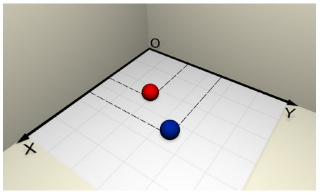


**Figura 8.12:** Ilustração das Coordenadas cartesianas no plano. / Fonte: Cepa

Observe que, exceto pelo sinal, as coordenadas são definidas como projeções do ponto $P$ sobre os eixos.

# 8.4 Funções Trigonométricas

A partir da definição do seno de um ângulo como associado à corda, não faz sentido falar em valores negativos para senos e cossenos.

A função seno é definida a partir da análise das propriedades de pontos localizados sobre um círculo. Não difere assim da ideia original de Hiparco. No entanto, agora, consideramos um sistema de coordenadas no centro do círculo.

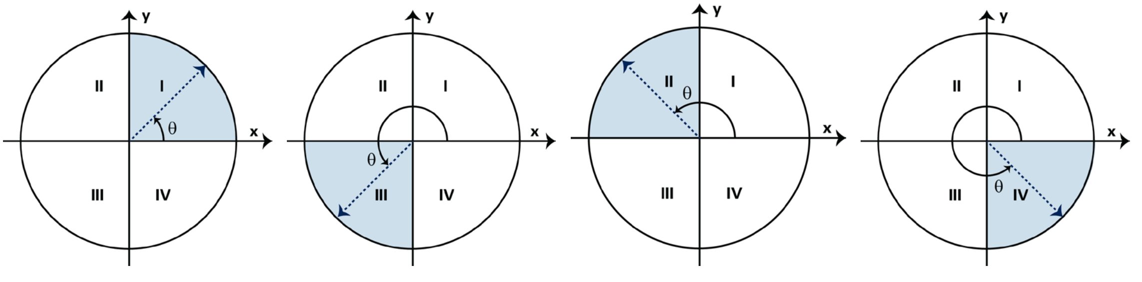


Figura 8.13: Sistema de coordenadas no centro do círculo de raio unitário. / Fonte: Cepa

Consideremos a **Figura 8.13**. Cada ponto $P$ sobre a circunferência, por outro lado, pode ser caracterizado pelo valor assumido pelo ângulo θ.

Podemos agora associar a qualquer ponto $P$ sobre o círculo unitário o valor de uma das coordenadas. Considerando que podemos ter duas coordenadas, que no caso das funções são designadas por abscissas e ordenadas, podemos definir duas funções a partir das associações:

$$\begin{aligned}\{P \in circ\} &\to \{x \in R\}\\ \{P \in circ\} &\to \{y \in R\}\end{aligned} \tag{8.28}$$

Tendo em vista que cada ponto pode ser caracterizado pela variável angular θ, tais funções associam a cada valor de θ um valor bem definido da abscissa correspondente (no primeiro caso) ou um valor bem definido da ordenada associada ao ângulo (no segundo caso).

Ou seja, a cada valor do ângulo θ caracterizando um ponto sobre a circunferência associamos sua abscissa ou, no segundo caso, a sua ordenada.

$$\begin{aligned}\{\theta \in R\} &\to \{x \in R\}\\ \{\theta \in R\} &\to \{y \in R\}\end{aligned} \tag{8.29}$$

A primeira associação define a função cosseno:

$$f(\theta) = \cos\theta \tag{8.30}$$

enquanto a segunda define a função seno:

$$f(\theta) = \operatorname{sen}\theta \tag{8.31}$$

Um gráfico típico dessas funções é apresentado abaixo.

Ambas as funções são periódicas, de período $2\pi$, isto é:

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos(\theta + 2\pi)\\ \operatorname{sen}\theta &= \operatorname{sen}(\theta + 2\pi)\end{aligned} \tag{8.32}$$

Por definição, as funções seno e cosseno podem assumir valores positivos e negativos para diferentes quadrantes. Elas variam entre os valores de −1 e 1. Para a função seno (ou cosseno) podemos escrever:

$$-1 \leq \text{sen}\theta \leq 1$$
$$-1 \leq \cos\theta \leq 1 \qquad 8.33$$

Lembramos que os valores das funções trigonométricas quando definidas a partir das relações métricas do triângulo retângulo é limitada. Por essa razão, os valores das funções trigonométricas para ângulos não excedendo o valor $\theta = \pi/2$, são sempre positivas. No entanto, como apontado anteriormente, as funções trigonométricas nos permitem calcular valores de ângulos excedendo $\theta = \pi/2$. Para analisarmos o sinal dos valores das funções trigonométricas para ângulos quaisquer dividimos o círculo unitário em quatro regiões denominadas quadrantes. Cada quadrante corresponde assim a intervalos no circulo unitário diferindo de $\pi/2$.

Os sinais das funções seno e cosseno em cada quadrante são apresentados na **Figura 8.14**. A partir desses sinais podemos inferir o sinal das demais funções. Assim, das duas primeiras figuras segue que os sinais da tangente são aqueles dados na última parte da **Figura 8.14**.

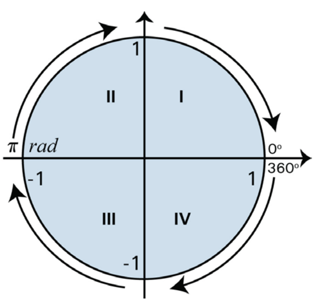



**Figura 8.14:** Sinais das funções seno e cosseno em cada quadrante. / Fonte: Cepa

| Função | Par ou Ímpar | Período | Sinais | Domínio | Imagem |
|---|---|---|---|---|---|
| **sen** $\alpha$ | **ímpar** $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$ | $2\pi$ | + + / – – | $\mathbb{R}$ | **[–1,1]** |
| **cos** $\alpha$ | **par** $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ | $2\pi$ | – + / – + | $\mathbb{R}$ | **[–1,1]** |
| **tg** $\alpha$ | **ímpar** $\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$ | $\pi$ | – + / + – | $x \neq \pi/2 + k\pi$ | $\mathbb{R}$ |

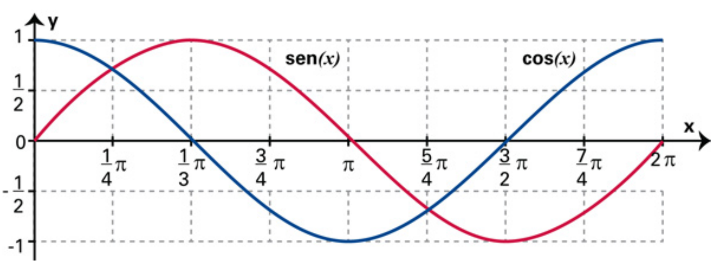



**Gráfico 8.1:** Gráfico das funções seno e cosseno. / Fonte: Cepa

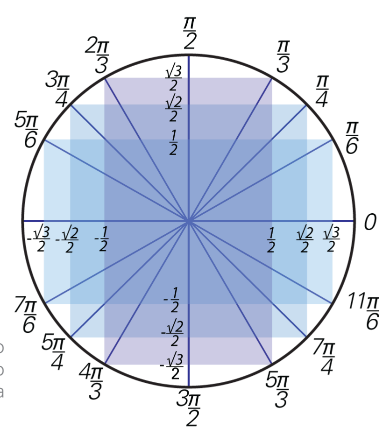



**Figura 8.15:** Círculo trigonométrico com alguns valores das funções seno e cosseno. / Fonte: Cepa

Uma propriedade simples e notável dessas funções é a de que, somando-se os valores de duas delas quaisquer ao quadrado, obtém-se o valor 1, ou seja:

$$(\text{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1 \quad 8.34$$

As funções seno e cosseno são funções ímpar e par, respectivamente, isto é:

$$\begin{aligned} \text{sen}\theta &= -\text{sen}(-\theta) \\ \cos\theta &= \cos(-\theta) \end{aligned} \quad 8.35$$

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) &= \text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 - \text{sen}\theta_2 \cos\theta_1 \\ \cos(\theta_1 - \theta_2) &= \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \text{sen}\theta_2 \text{sen}\theta_1 \end{aligned} \quad 8.36$$

As demais funções relevantes podem ser definidas a partir das anteriores. Então, definimos a função tangente como o quociente:

$$\boxed{\text{tg}\theta \equiv \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}} \quad 8.37$$

Definimos a função cotangente como o inverso da função tangente:

$$\boxed{\text{cotg}\theta \equiv \frac{1}{\text{tg}\theta} = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}} \quad 8.38$$

Definimos ainda a função secante como o inverso da função cosseno. Temos, pois:

$$\boxed{\sec\theta \equiv \frac{1}{\cos\theta}} \quad 8.39$$

enquanto definimos a função cossecante como o inverso da função seno:

$$\boxed{\text{cossec}\theta \equiv \frac{1}{\text{sen}\theta}} \quad 8.40$$

Essas funções são igualmente periódicas de período $2\pi$ e obedecem aos critérios de paridade das funções que lhes deram origem.

Os gráficos das funções trigonométricas são apresentados na figura abaixo.

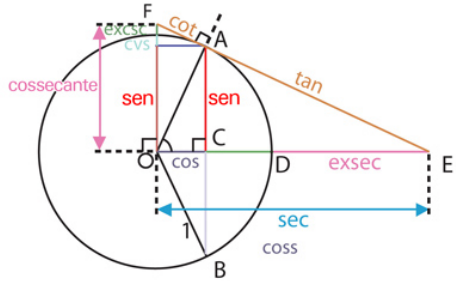



**Figura 8.16:** Geometria das funções trigonométricas. / Fonte: Cepa

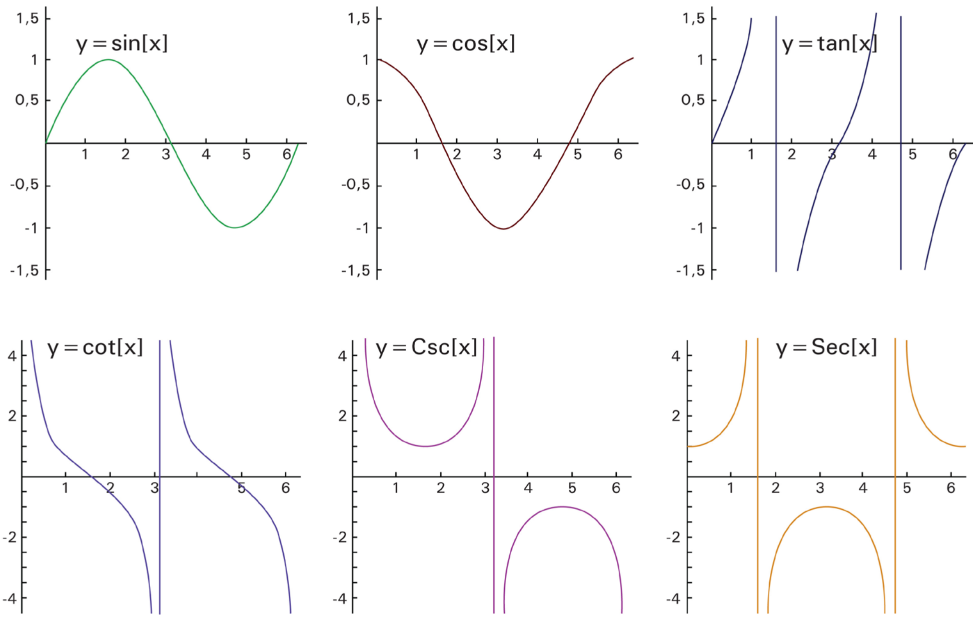



**Gráfico 8.2:** Gráficos típicos de funções trigonométricas. / Fonte: Cepa

# 8.5 Funções Inversas

As funções trigonométricas anteriores são inversíveis. Suas funções inversas são representadas por meio do uso do prefixo **arc.** Definimos assim a função arco seno

$$f(\theta) = \operatorname{arc\,sen}\theta \quad (8.41)$$

Analogamente, definimos as demais funções inversas:

$$f(\theta) = \arccos\theta \quad (8.42)$$

$$f(\theta) = \text{arctg}\theta \tag{8.43}$$

$$f(\theta) = \text{arccotg}\theta \tag{8.44}$$

$$f(\theta) = \text{arcsec}\theta \tag{8.45}$$

$$f(\theta) = \text{arccossec}\theta \tag{8.46}$$

Todas as funções acima são tais que:

$$f \circ f^{-1}(\theta) = \theta \tag{8.47}$$

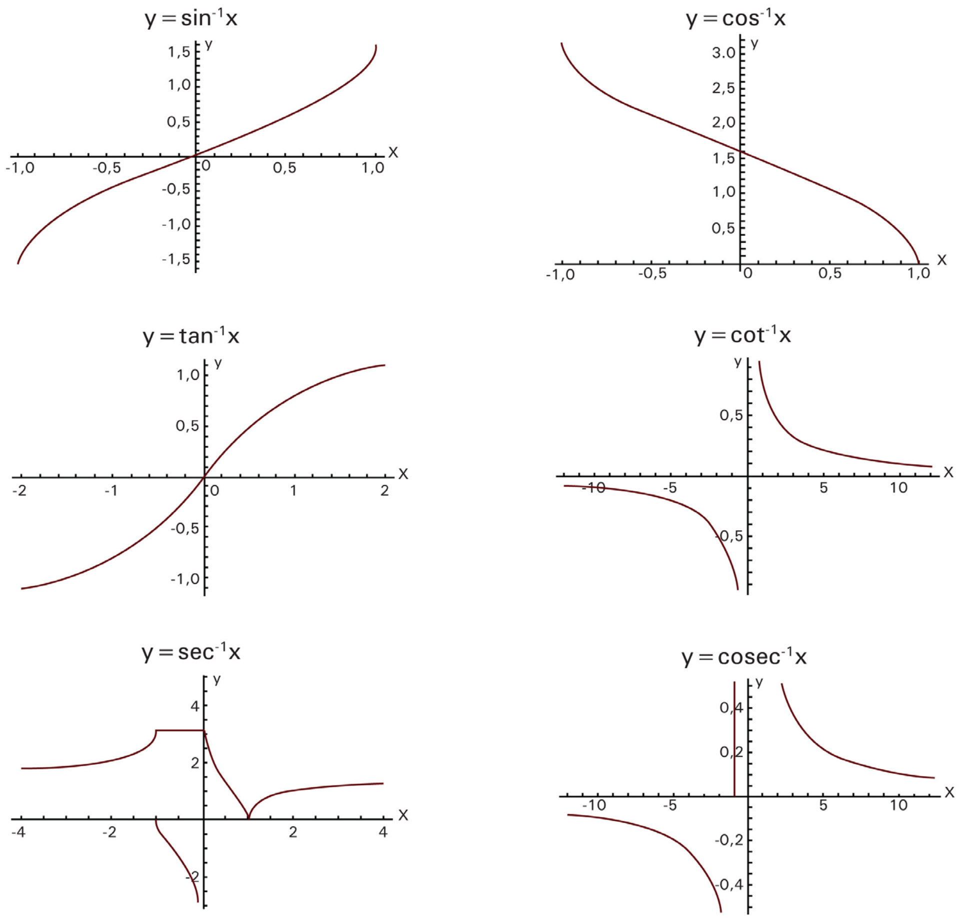



**Gráfico 8.3:** Gráfico das funções inversas. / Fonte: Cepa