1 INTRODUÇÃO À TEORIA DOS CONJUNTOS

Gil da Costa Marques

1.1 Introdução

Figura 1.1: Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, matemático russo (1845-1918).

Georg Cantor (1845-1918) recebeu o crédito por ter revolucionado a matemática com a Teoria dos Conjuntos, que foi desenvolvida por ele a partir de 1874.

Cantor iniciou seus estudos procurando uma formalização para o conceito de infinito, chegando à conclusão de que existem diferentes ordens de infinitos. A classificação dessas ordens se torna possível quando essa questão é formulada em termos de números, denominados por ele transfinitos. A introdução desses conceitos levou-o a desenvolver um formalismo matemático, conhecido hoje como Teoria dos Conjuntos.

De acordo com Howard Eves, citação encontrada em seu livro **História da Matemática**,

> "A moderna teoria matemática dos conjuntos é uma das mais notáveis criações do espírito humano"

e ela adquire enorme importância em várias áreas da matemática, fazendo com que esse ferramental seja essencial quando se estudam os fundamentos da matemática. Esse é o caso do cálculo diferencial e integral. E isso justifica sua inclusão num texto dedicado ao cálculo, por exemplo.

Pode-se considerar a Teoria dos Conjuntos como um formalismo interdisciplinar: ela serve como um elo entre a matemática, de um lado, e a filosofia e a lógica, de outro lado. Daí se infere a relevância dessa teoria para toda a ciência.

1.2 Conceitos básicos

Intuitivamente, um conjunto M é uma coleção de objetos definidos e separados, mas que formam um todo. Os objetos pertencentes à coleção são os elementos do conjunto. Objetos podem ser entendidos no sentido mais abrangente possível. Podem ser tanto reais quanto imaginários. No entanto, na matemática é mais usual trabalharmos com objetos associados a números.

Figura 1.2: Conjunto de objetos.

Utilizamos a notação que envolve o símbolo { } para designar conjuntos. Assim, representamos o conjunto M, formalmente, como:

{ 3, 6, 91, ... }

Figura 1.3: Conjunto de números.

$$M = \{m_1, m_2, m_3, m_4 ....\} \tag{1.1}$$

O fato de um objeto m_i ser ou não elemento de um conjunto é indicado, respectivamente, por:

$$m_i \in M \quad \text{ou} \quad m_i \notin M \qquad \text{1.2 e 1.3}$$

Por exemplo, o conjunto dos números inteiros, representado pela letra $\mathbb{Z}$, é tal que seus elementos são dados por:

$$\mathbb{Z} = \{0,\ 1, -1,\ 2, -2, 3, -3,\ 4, -4.....\} \tag{1.4}$$

Muitas vezes, conjuntos são definidos a partir de uma propriedade P a ser satisfeita pelos seus elementos. Assim, utilizamos a seguinte notação nesse caso:

$$M = \{m_i \mid m_i \text{ satisfaz } P\} \tag{1.5}$$

A notação acima deixa explícito que o conjunto M é constituído por todos os elementos m_i que satisfazem a propriedade P. Nessa notação, o conjunto dos números naturais seria especificado como o conjunto formado pelos números inteiros não negativos. Admitindo-se que $n_i \in \mathbb{Z}$, escrevemos:

$$\mathbb{N} = \{n_i \mid n_i \geq 0\} \tag{1.6}$$

Quando não existem elementos que satisfaçam uma determinada propriedade, dizemos que o conjunto é vazio. Ele é representado pelo símbolo:

$$\varnothing \text{ ou } \{\ \} \tag{1.7}$$

Por exemplo, o conjunto de elementos constituído pelos números reais tais que $m_i^2 = -1$, isto é:

$$M = \{m_i \mid m_i^2 = -1\} \qquad 1.8$$

é um conjunto vazio, uma vez que não existe número real que satisfaça à condição imposta.

Conjuntos iguais são aqueles que têm os mesmos elementos. Por exemplo, o conjunto de raízes do polinômio de segundo grau $x^2 - 3x + 2 = 0$ é igual ao conjunto $\{1, 2\}$.

Para conjuntos A e B iguais, escrevemos:

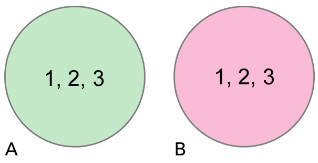

Figura 1.4: Dois conjuntos que têm os mesmos elementos. São iguais, portanto.

$$A = B.$$

1.3 Subconjuntos e intervalos

Denominamos subconjunto de um conjunto M a qualquer coleção M_1 de objetos, que são elementos de M. Dizemos que o conjunto M_1 está contido em M e, para indicar esse fato, escrevemos:

$$M_1 \subset M \qquad 1.9$$

Por exemplo:

$$\{1,5\} \subset \{1,2,4,5\} \qquad 1.10$$

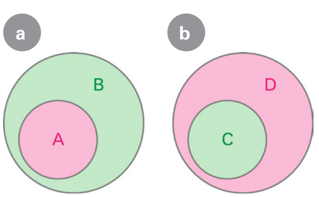

Figura 1.5: a. A é um subconjunto de B. **b.** C é um subconjunto de D.

Escrevemos, analogamente, quando um conjunto B contém o conjunto A (**Figura 1.5**):

$$B \supset A \text{ ou } A \subset B \qquad 1.11$$

Alguns dos subconjuntos dos números inteiros são:

$$\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,3,4,\ldots\} \tag{1.12}$$

conjunto esse muitas vezes designado por conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$). Tomando-se o negativo dos números do subconjunto de **1.12**, obtemos outro subconjunto do conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z}_- = \{0,-1,-2,-3,-4,\ldots\} \tag{1.13}$$

O conjunto dos inteiros excluindo o número zero:

$$\mathbb{Z}^* = \{1,-1,\ 2,-2,3,-3,\ 4,-4,\ldots\} \tag{1.14}$$

Introduzimos ainda os subconjuntos dos números inteiros:

$$\mathbb{Z}_+^{\ *} = \{1,2,3,4,\ldots\} \tag{1.15}$$

$$\mathbb{Z}_-^{\ *} = \{-1,-2,-3,-4,\ldots\} \tag{1.16}$$

Alguns subconjuntos do conjunto $\mathbb{Z}$ são os seguintes:

a. Conjunto dos números pares: $\{\ldots,-4,-2,\ 0,\ \ 2,\ \ 4,\ldots\}$

Figura 1.6

b. Conjunto dos números ímpares: $\{\ldots,-3,-1,1,3,\ldots\}$

Figura 1.7

c. Conjunto dos números primos: $\{2,-2,3,-3,5,-5,7,-7,11,-11,13,-13,17,-17\ldots\}$

Figura 1.8

d. Conjunto dos números positivos, múltiplos de 3 e menores do que 10: $\{3,6,9\}$

Figura 1.9

Exemplos

- **Exemplo 1**

Vamos representar explicitamente os seguintes conjuntos:

a. $\mathbb{N}^* = \{n_i \mid n_i > 0\}$. Logo, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$.

b. $B = \{x \in \mathbb{Q} : 2x - 3 = 12\}$

A equação $2x - 3 = 12$ admite $x = 15/2$ como única raiz, e $15/2$ é um número racional. Logo, $B = \{15/2\}$.

c. $C = \{x \in \mathbb{N} : |x - 3| \leq 5\}$

Resolvendo a inequação modular $|x - 3| \leq 5$, temos:

$$-5 \leq x - 3 \leq 5$$
$$-2 \leq x \leq 8$$

Logo, $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

1.4 O conjunto dos números reais

Conjuntos numéricos são aqueles cujos elementos são números. O conjunto de todos os números, que podem ser colocados em correspondência biunívoca com os pontos do espaço localizados sobre uma reta orientada (com um ponto de referência denominado origem), é o conjunto dos números reais. Tal conjunto é representado pela letra $\mathbb{R}$.

Figura 1.10: A reta real.

O conjunto dos números racionais é representado pela letra $\mathbb{Q}$. Por definição, fazem parte desse conjunto todos os números que podem ser escritos como quocientes de números inteiros. Explicitamente, escrevemos:

$$\mathbb{Q} = \{x \mid x = a / b,\ a \in \mathbb{Z}\ b \in \mathbb{Z}^*\} \quad (1.17)$$

O conjunto $\mathbb{Q}$ é um subconjunto do conjunto $\mathbb{R}$, isto é, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Evidentemente, temos também $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, isto é, o conjunto dos números naturais e aquele dos números inteiros são subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Em se tratando de números reais, é costumeira a introdução de outros conjuntos além daqueles já definidos. Assim, se excluirmos o elemento zero, colocamos (como feito acima) um asterisco $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{N}^*$,... para indicar o conjunto correspondente. Temos assim que para n_i inteiro, por definição:

Figura 1.11

$$\mathbb{N}^* = \{ n_i \mid n_i > 0 \} \tag{1.18}$$

Definimos por exemplo, no caso dos números reais:

Figura 1.12

$$\mathbb{R}_+ = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \} \tag{1.19}$$

Figura 1.13

$$\mathbb{R}_- = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \} \tag{1.20}$$

Figura 1.14

$$\mathbb{R}_+^* = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \} \tag{1.21}$$

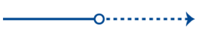

Figura 1.15

$$\mathbb{R}_-^* = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \} \tag{1.22}$$

1.4.1 A relação de ordem em $\mathbb{R}$

Para dois elementos pertencentes ao conjunto dos números reais valem as operações usuais de adição e multiplicação. Podemos introduzir ainda uma relação conhecida como **relação de ordem**. Ela será representada pelo símbolo $\leq$. Se a e b forem dois elementos distintos de $\mathbb{R}$ $(a \neq b)$, a notação $a < b$ significa que, para tais números, vale a relação de ordem $a \leq b$.

Se a, b, c e $d \in \mathbb{R}$, a relação de ordem goza das seguintes propriedades:

- para números arbitrários, temos $a \leq b$ ou $a \geq b$;
- se as duas condições, $a \leq b$ e $b \leq a$, forem satisfeitas, então, $b = a$;
- se $a \leq b$ e $b \leq c$, então, $a \leq c$;
- se $a \leq b$ e $c \leq d$, então, $a + c \leq b + d$.

1.5 Intervalos

A partir de dois números reais, designados por a e b, de tal sorte que $a \leq b$, podemos definir conjuntos especiais a partir desses números, que denominamos intervalos.

Intervalo aberto é aquele definido por:

$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \tag{1.23}$$

Figura 1.16: Intervalo aberto $]a,b[$

Intervalo aberto à esquerda é o conjunto:

$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \tag{1.24}$$

Figura 1.17: Intervalo semifechado à direita ou intervalo semiaberto à esquerda.

Intervalo aberto à direita é o conjunto:

$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \tag{1.25}$$

Figura 1.18: Intervalo semifechado à esquerda ou intervalo semiaberto à direita

Finalmente, definimos um intervalo fechado como aquele cujos elementos incluem os extremos do intervalo, ou seja,

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \tag{1.26}$$

Figura 1.19: Intervalo fechado $[a,b]$

Os intervalos **1.23**, **1.24**, **1.25** e **1.26** podem ser entendidos como subconjuntos dos números reais estendidos, ou seja, o conjunto de números reais incluindo $-\infty$ e $+\infty$.

De acordo com essa interpretação, podemos introduzir os seguintes intervalos:

$$]-\infty,b], \quad]-\infty,b[, \quad [a,+\infty[, \quad \text{e} \quad]a,+\infty[\tag{1.27}$$

Em particular, o intervalo $]-\infty, +\infty[$ denota o conjunto de números reais.

Utilizando essa simbologia, o conjunto $\mathbb{R}$ será representado pelo intervalo aberto, sem limite definido e sem pontos extremos:

$$\left]-\infty, +\infty\right[= \mathbb{R} \tag{1.28}$$

Todo intervalo é dotado da propriedade:

$$\forall x, y \in I, x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I \tag{1.29}$$

ou seja, se dois números pertencem ao intervalo, então, o mesmo vale para qualquer número entre eles.

1.5.1 Vizinhança de um ponto

Dado um ponto x_0 no eixo real ou um elemento do conjunto dos números reais, definimos uma vizinhança completa desse ponto representada por $V(x_0)$ a um intervalo aberto I que o contenha, ou seja, $x_0 \in I$.

Definimos a vizinhança-ε de x_0 sobre o eixo real, denotada por $V_\varepsilon(x_0)$, como o intervalo aberto:

$$V_\varepsilon\left(x_0\right) = \left]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\right[\tag{1.30}$$

1.5.2 Comprimento de um segmento (distância entre dois pontos numa reta)

Antes de introduzirmos o conceito de distância entre dois pontos pertencentes à reta ou de comprimento de um segmento de reta, introduzimos o módulo ou valor absoluto de um número real.

Seja x um número real ou, analogamente, a coordenada cartesiana de um ponto sobre a reta real. Escrevemos, assim, $x \in \mathbb{R}$. O módulo de um número real ou seu valor absoluto, representado por $|x|$, é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{1.31}$$

Da definição **1.31** segue-se que, $|x| \geq 0$ e $x \leq |x|$; se y for outro número real:

$$|xy| = |x||y| \quad (1.32)$$

Dados dois pontos quaisquer, x_1 e x_2, podemos introduzir um intervalo fechado que os contenha. Tal intervalo corresponde a um segmento de reta. Definimos o comprimento do segmento ou distância entre esses dois pontos como:

$$d(x_1, x_2) = |x_2 - x_1| \quad (1.33)$$

1.6 Operações com conjuntos

Definimos algumas operações que envolvem conjuntos, como veremos a seguir:

1.6.1 União

A união de dois conjuntos A e B é representada por:

$$A \cup B \quad (1.34)$$

é um novo conjunto cujos elementos são aqueles que pertencem a um dos dois conjuntos, ou a ambos, isto é, os elementos pertencem a pelo menos um dos conjuntos. Formalmente, escrevemos "A união B" da seguinte maneira:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} \quad (1.35)$$

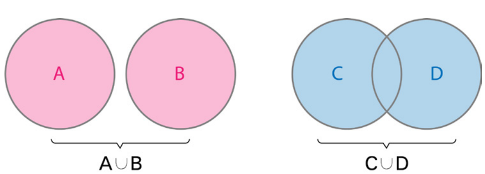

Figura 1.20: União de conjuntos.

- Exemplo 2

Considere os conjuntos:

$$A = \{1,2,4,6,7,9,11\}$$ 1.36

$$B = \{0,2,5,6,7,10,12\}$$ 1.37

$$A \cup B = \{0,1,2,4,5,6,7,9,10,11,12\}$$ 1.38

Pode-se verificar que as seguintes propriedades são válidas:

- $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \cup \mathrm{A}$ 1.39
- $\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup \mathrm{C}$ 1.40
- $A \subset (A \cup B)$ 1.41
- $A \subset B$ se, e somente se, $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B}$ 1.42
- $\mathrm{A} \cup \mathrm{A} = \mathrm{A}$ 1.43
- $\mathrm{A} \cup \varnothing = \mathrm{A}$ 1.44

- Exemplo 3

Ao resolver uma inequação como $(x^2 - 5x + 6)(2x - 1) \leq 0$, podemos dar o conjunto-solução na forma de um intervalo. Vejamos:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = -3$$
$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$$

Estudando o sinal do produto das duas funções

$$y_1(x) = x^2 - 5x + 6$$
$$y_2(x) = x - 1/2$$

temos:

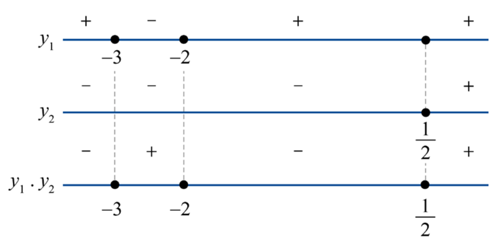

Figura 1.21: Variação de sinal das funções $y_1(x) = x^2 - 5x + 6$ e $y_2(x) = x - 1/2$

Logo, $(x^2 - 5x + 6)(2x - 1) \leq 0$ quando $x \leq -3$ ou $-2 \leq x \leq 1/2$, isto é,

$$S =]-\infty, -3] \cup [-2, 1/2]$$

1.6.2 Intersecção

A intersecção de dois conjuntos, representada por:

$$A \cap B \quad (1.45)$$

que se lê "A intersecção B", é um novo conjunto cujos elementos são comuns a ambos os conjuntos. Evidentemente, pode acontecer que não haja elementos em comum e, nesse caso, $A \cap B$ é o conjunto vazio. Dizemos, então, que A e B são disjuntos.

Formalmente, escrevemos:

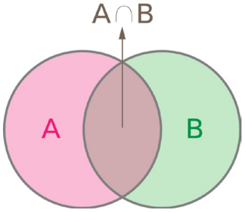

Figura 1.22: Intersecção de conjuntos.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ e \ x \in B\} \quad (1.46)$$

No exemplo dado anteriormente:

$$A \cap B = \{2,6,7\} \quad (1.47)$$

Pode-se verificar que as seguintes propriedades são válidas:

- $A \cap B = B \cap A$ (1.48)
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (1.49)
- $A \cap B \subset A$ (1.50)
- $A \subset B$ se, e somente se, $A \cap B = A$ (1.51)
- $A \cap A = A$ (1.52)
- $A \cap \varnothing = \varnothing$ (1.53)

1.6.3 Diferença

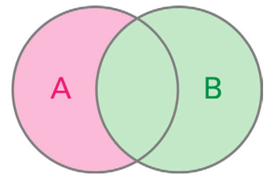

Figura 1.23: A diferença entre os conjuntos A e B representada por $A - B$ é o conjunto dos elementos que estão em A, mas não estão em B.

Podemos definir o conjunto diferença (C) de dois conjuntos A e B, que é indicado por $A - B$, como aquele cujos elementos pertencem ao conjunto A, mas não pertencem ao conjunto B. Ele é representado por:

$$C = A - B \tag{1.54}$$

Se B for um subconjunto de A ou o próprio conjunto ($B \subset A$), dizemos que o conjunto diferença é o complemento de B em A.

Exemplos:

- $\{1, 2\} - \{\text{vermelho, preto, branco}\} = \{1, 2\}$. 1.55
- $\{1, 2, \text{verde}\} - \{\text{vermelho, branco, verde}\} = \{1, 2\}$. 1.56
- $\{1, 2\} - \{1, 2\} = \varnothing$. 1.57
- $\{1, 2, 3, 4\} - \{1, 3\} = \{2, 4\}$. 1.58

- Exemplo 4

Dados dois conjuntos A e B não disjuntos, isto é, $A \cap B \neq \varnothing$, podemos representar num diagrama o conjunto $(A \cup B) - (A \cap B)$.

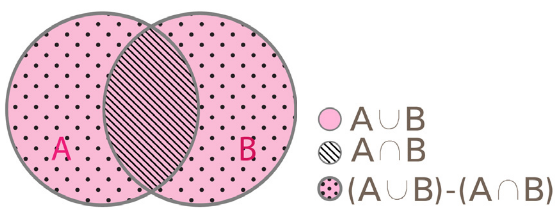

Figura 1.24: Conjunto $(A \cup B) - (A \cap B)$.

1.6.4 Produto cartesiano de conjuntos

A partir de dois conjuntos A e B, podemos criar um novo conjunto mediante uma operação denominada produto cartesiano desses conjuntos, representado por:

$$A \times B \tag{1.59}$$

Esse novo conjunto (o produto cartesiano de A e B) é construído mediante a associação de todo elemento do primeiro conjunto a todo elemento pertencente ao outro. Assim, o produto cartesiano $A \times B$ de dois conjuntos é formado por elementos que são pares ordenados (a, b) tais que a é um elemento de A e b é um elemento de B.

Temos, assim, que:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\} \tag{1.60}$$

- Exemplo 5
  - $\{1, 2\} \times \{\text{vermelho}, \text{branco}\} = \{(1, \text{vermelho}), (1, \text{branco}), (2, \text{vermelho}), (2, \text{branco})\};$ 1.61
  - $\{1, 2\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$ 1.62

Algumas propriedades dos produtos cartesianos são:

- $A \times \varnothing = \varnothing$ 1.63
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)s$ 1.64
- $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ 1.65
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ 1.66
- $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ 1.67

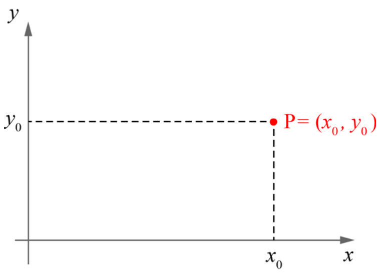

Figura 1.25: Plano cartesiano.

O produto cartesiano

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{1.68}$$

é um conjunto que pode ser colocado em correspondência biunívoca com os pontos do plano.

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$$

O produto cartesiano

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 \tag{1.69}$$

é um conjunto que pode ser colocado em correspondência biunívoca com os pontos do espaço.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ e } z \in \mathbb{R}\} \tag{1.70}$$

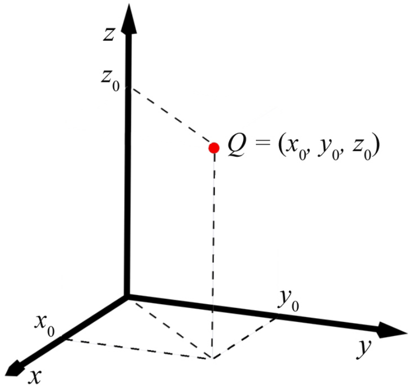

Figura 1.26: O espaço tridimensional é o conjunto $\mathbb{R}^3$.