FUNÇÕES 2

Gil da Costa Marques

2.1 O conceito de função

O conceito de função evoluiu, de forma significativa, nos últimos três séculos. Ele passou por várias generalizações e ampliações. O termo "função" parece ter sido introduzido por Leibniz, em 1694. Newton, por exemplo, utilizava a palavra "fluente" para designar algo que varia à medida que o tempo passa. A posição, a velocidade e a aceleração de um corpo seriam, na linguagem de Newton, os fluentes importantes da mecânica.

Nas várias formulações empregamos o conceito de variável, que Lejeune Dirichlet (1805-1859) definia assim: uma variável é um símbolo que representa um elemento qualquer de um determinado conjunto de números.

Johann Bernoulli considerava como função qualquer expressão envolvendo uma só variável e algumas constantes. Para Euler, função seria uma fórmula que envolvesse variáveis e constantes, conceito esse difundido no ensino médio. A Euler devemos também a notação $f(x)$ para designar uma função da variável x. Joseph Fourier (1768-1830) ampliou tal conceito para incorporar uma relação mais geral entre as variáveis denominada "série".

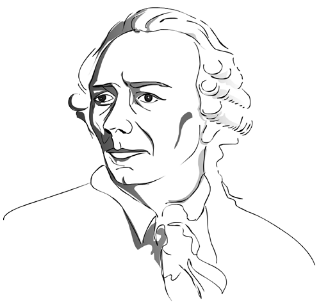

Figura 2.1: Leonhard Paul Euler (1707 - 1783), matemático suíço.

Bernoulli formulou um conceito de função centrado na ideia de relação entre conjuntos de números. É uma definição muito ampla, que pode ser formulada da seguinte maneira: se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde, mediante a aplicação de uma lei ou regra, um valor de y, então se diz que y é uma função de x. Também definia variáveis independentes e dependentes da seguinte forma: a variável x, à qual se atribuem valores, é chamada variável independente e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada variável dependente.

Os valores possíveis que x pode assumir pertencem a um conjunto denominado domínio da função. Os valores assumidos por y pertencem a um conjunto numérico denominado contradomínio de f.

Figura 2.2: Johann Bernoulli (1667 - 1748), matemático suíço.

A teoria dos conjuntos permite-nos ampliar o conceito de função de forma a abarcar relações entre conjuntos constituídos por elementos de qualquer natureza, ou seja, os conjuntos acima referidos não são, necessariamente, conjuntos de números.
De acordo com essa definição mais geral, se considerarmos dois conjuntos A e B, uma função é uma relação que associa a cada elemento x de A um único elemento y de B. Esse elemento,

$$y = f(x),$$

é chamado imagem de x.

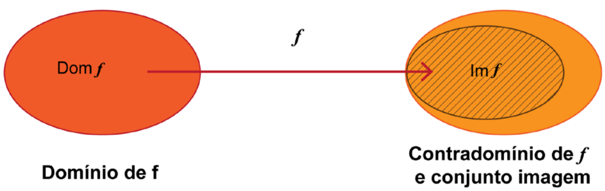

Figura 2.3: Domínio, contradomínio e o conjunto imagem de uma função.

Mais geralmente, no contexto da teoria dos conjuntos, o conjunto A é denominado domínio de f (indicado como Dom f) ao passo que o conjunto B é o contradomínio de f (indicado como CD f). O conjunto constituído pelos elementos de B que são imagem de algum elemento do conjunto A é um subconjunto de B denominado conjunto imagem de f (indicado como Im f, ou I).

Como exemplo, sejam:

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\} \quad 2.1$$

$$B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, 6, 7\} \quad 2.2$$

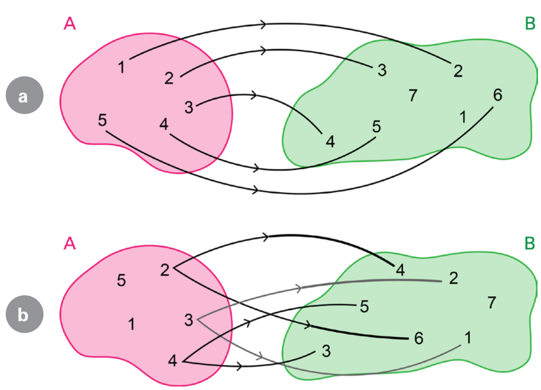

Figura 2.4: a) Associação que define uma função; **b)** associação que não define uma função

e consideremos duas associações de elementos de A a elementos de B.

A primeira associação, representada pela **Figura 2.4a**, que associa a um número real positivo o mesmo número acrescido de +1, define uma função. A segunda associação, pela falta da exigência de associar um elemento de A a apenas um elemento de B, bem como por haver elementos de A que não têm imagem em B, não define uma função de A em B.

Na **Figura 2.4a**, o domínio da função e o seu conjunto imagem são dados por

$$\text{Dom}\, f = D = A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\} \qquad 2.3$$

$$\text{Im}\, f = I = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\} \subset B \qquad 2.4$$

No primeiro exemplo de função podemos notar a existência de uma regra (mesmo número acrescido de +1) para determinar um elemento do conjunto imagem.

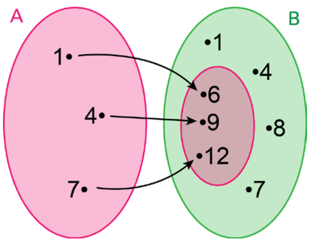

Figura 2.5: Outro exemplo de função.

Um segundo exemplo de função está ilustrado na **Figura 2.5**, na qual consideramos dois conjuntos numéricos:

$$A = \{1,\ 4,\ 7\} \qquad 2.5$$

$$B = \{1,4,6,7,8,9,12\} \qquad 2.6$$

Ao associarmos a todo ponto do conjunto A um e apenas um ponto do conjunto B temos em mãos outro exemplo de função. Observe que, nesse caso, também dispomos de uma regra (a cada número associamos o mesmo número acrescido de +5). Temos, assim, a seguinte associação

- Ao ponto $x = 1$ associamos o ponto imagem $y = 6$. Isto é: $y(1) = 6$.
- Ao ponto $x = 4$ associamos o ponto imagem $y = 9$. E, portanto: $y(4) = 9$.
- Ao ponto $x = 7$ associamos o ponto imagem $y = 12$. O que implica $y(7) = 12$.

Portanto, nesse exemplo o domínio é $D = \{1, 4, 7\}$, o contradomínio CD é $= \{1, 4, 6, 7, 8, 9, 12\}$ e o conjunto imagem é $I = \{6, 9, 12\}$.

Entretanto, também poderíamos ter feito outro tipo de associação de modo que

- ao ponto $x = 1$ corresponda $y = 4$
- ao ponto $x = 4$ corresponda $y = 8$
- ao ponto $x = 7$ corresponda $y = 9$

e, nesse caso, não dispomos de uma regra como antes para associar os elementos de A a elementos de B. Assim mesmo temos uma função cujo domínio é $\{1, 4, 7\}$ e cuja imagem é $\{4, 8, 9\}$.

Podemos introduzir ainda o conceito de função de mais de uma variável. Por exemplo, se uma grandeza física z depende de duas variáveis, x e y, representamos tal dependência por:

$$z = f(x, y) \qquad 2.7$$

Para adquirir uma sólida formação científica, é importante ter familiaridade com esse conceito. Construir essa familiaridade é o que será buscado nos textos subsequentes.

2.2 Gráficos de funções

Credita-se ao Bispo Nicole d'Oresme, ainda no século XIV, a invenção dos gráficos. Essa foi a forma que ele encontrou para provar a equivalência entre o movimento uniformemente variado e um movimento uniforme com uma velocidade adequada. Galileu também utilizou gráficos em seus estudos dos mesmos movimentos.

> Numa linguagem simples pode-se dizer que o gráfico de uma função é uma figura na qual é possível visualizar como uma grandeza varia quando outra varia. É a união, portanto, de fatos relativos a números com a geometria.
> Tendo em vista que figuras são conjuntos de pontos, cada ponto desse conjunto é caracterizado por um par ordenado. Os valores da variável y são representados no eixo vertical ao qual denominamos eixo das ordenadas. No eixo horizontal, o eixo das abscissas, exibimos os valores da variável independente, x.
> Do ponto de vista formal, o gráfico de uma função é uma curva que nunca se cruza, constituída pela coleção de todos os pares ordenados (x, y) tais que $y = f(x)$.

Resultados experimentais são frequentemente apresentados em gráficos, a partir dos quais podemos fazer previsões teóricas. Os gráficos são, assim, utilizados para apresentar o comportamento de alguma grandeza que depende de outra (ou outras). Na **Figura 2.6b**, exibimos um gráfico, que representa o comportamento da intensidade de radiação emitida por um objeto aquecido como função da frequência da radiação por ele emitida. Trata-se de um gráfico que revolucionou a Física.

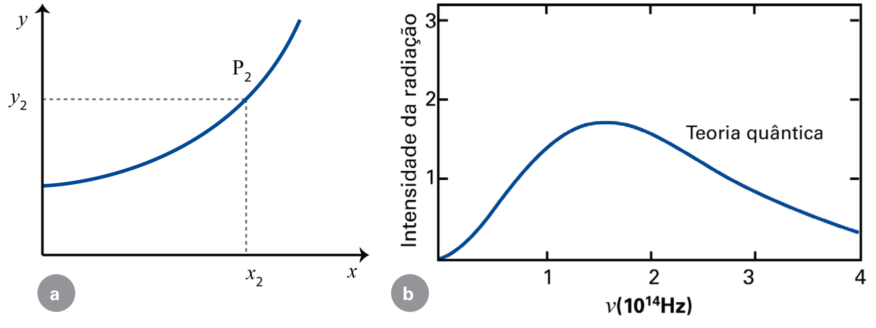

Figura 2.6: a) Gráfico de uma função. **b)** Gráfico obtido a partir da teoria quântica.

Dado um gráfico, é possível encontrar o valor da variável dependente associada a um determinado valor da variável independente x. Para tanto, basta considerar o valor da variável independente e, a partir dele, traçar uma reta paralela ao eixo y até encontrar a curva que é o gráfico. A partir desse ponto, deve-se traçar outra reta paralela agora ao eixo x até encontrar o eixo y. Esse ponto de encontro determina o valor da variável dependente associado ao valor escolhido da variável x (vide **Figura 2.6a**).

2.3 Construindo gráficos

Gráficos podem ser construídos a partir de dois tipos de informações. No primeiro, a função é conhecida e tudo que queremos é visualizar o seu comportamento e, para isso, construímos o gráfico. Na segunda, tudo que temos é uma tabela cujas informações foram obtidas, experimentalmente, por meio de medidas.

Por exemplo, a fim de estudar o fenômeno das marés e observar a entrada e saída de grandes navios, o pesquisador anota a altura do nível da água no porto de Santos, em intervalos de tempo, obtendo assim uma tabela de valores. Numa das colunas encontramos a altura da água do mar, enquanto na outra coluna temos o valor do tempo associado a cada altura.

Figura 2.7: Entender os horários das marés é importante para a segurança das embarcações.

Hora do dia (h)	Nível de água (m)
1	0,5
5	0,9
8	0,9
9	0,7
12h30	0,3
15	0,6
17	0,9
19	0,9
21	0,7

Tabela 2.1: Variação da maré 18/02/05.

Para construir um gráfico a partir de uma tabela, devemos primeiro traçar dois eixos perpendiculares entre si e orientá-los, utilizando flechas. Ao orientarmos os eixos x e y, estamos definindo os segmentos dos eixos para os quais as coordenadas assumem valores positivos ($y > 0$ e $x > 0$).

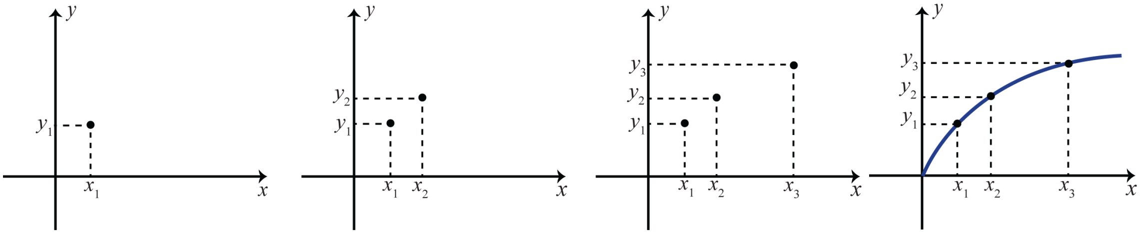

Figura 2.8: Etapas da construção de um gráfico.

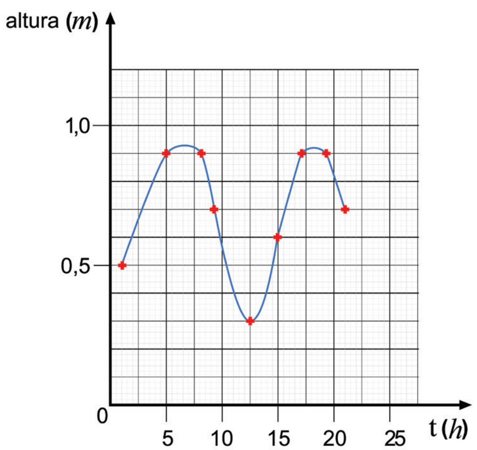

Figura 2.9: A partir dos dados de uma tabela, inserimos pontos no plano x-y. Em seguida interligamos os pontos.

A partir de uma tabela, a **Tabela 2.1**, por exemplo, marcamos um ponto sobre o eixo x, o qual representa um particular valor dessa grandeza, no caso o tempo. Agora fazemos o mesmo para a coordenada y correspondente a esse valor de x. Por esses dois pontos sobre os eixos x e y, fazemos passar dois segmentos de reta. Observe que esses dois segmentos se encontrarão num determinado ponto.

Fazendo o mesmo para todos os valores da tabela teremos algo como ilustrado na **Figura 2.9**.

Ao interligarmos esses pontos, desenhamos uma curva que facilita a visualização do comportamento da função.

Quando não temos uma tabela, mas temos a expressão da função, podemos gerar a tabela a partir de valores da variável independente x, para cara um dos quais associamos o correspondente valor da variável dependente, $y = f(x)$.

x_1	$y_1 = f(x_1)$	2.8
x_2	$y_2 = f(x_2)$	2.9
x_3	$y_3 = f(x_3)$	2.10

Vale observar que um grande número de pontos na tabela pode melhorar a visualização do comportamento da função, mas não garante a exatidão do gráfico, o que só poderá ocorrer com a utilização de argumentos poderosos, como veremos mais adiante.

2.4 Algumas funções simples

Para o que se segue, consideraremos primeiro o exemplo da função identidade. Ela é definida a partir da relação:

$$f_0(x) = x \tag{2.11}$$

Nesse caso associamos um elemento do conjunto de números reais ao mesmo elemento desse conjunto.

A função identidade é um caso especial de funções lineares. A função linear mais geral possível se escreve como:

$$f_1(x) = ax \quad \text{com } a \neq 0 \tag{2.12}$$

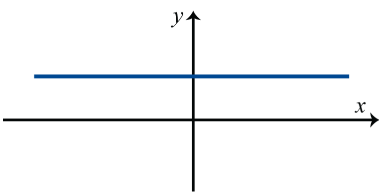

Figura 2.10: Gráfico de uma função constante.

Também temos a função constante que a todo valor da variável independente x associa o mesmo valor b:

$$f(x) = b \tag{2.13}$$

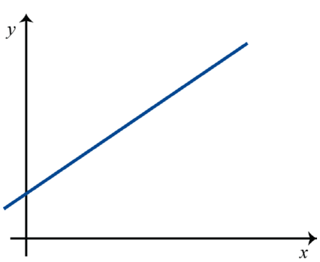

Figura 2.11: Gráfico da função afim.

Definimos a função afim como aquela que resulta da soma da função linear e da função constante:

$$f(x) = ax + b \quad \text{com } a \neq 0 \text{ e } b \neq 0 \tag{2.14}$$

O domínio dessa função, bem como o das duas anteriores, é o conjunto de todos os números reais, ou seja,

$$D = \mathbb{R} \tag{2.15}$$

A imagem da função linear $f_1(x) = ax$, $a \neq 0$, é igual ao conjunto de todos os reais, bem como a imagem da função afim $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, isto é, $I = \mathbb{R}$.

No caso da função constante, $f(x) = b$, a imagem é o conjunto $\{b\}$, isto é, $I = \{b\}$.

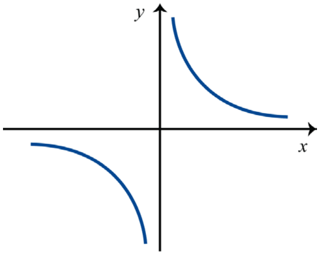

Figura 2.12: Gráfico da função inverso de x.

A função inverso de x associa a cada número real diferente de zero o inverso do seu valor. Ela é definida, portanto, como:

$$f_2(x) = \frac{1}{x} \tag{2.16}$$

O domínio dessa função é o conjunto dos números reais diferentes de zero, e seu conjunto imagem é o conjunto de números reais e diferentes de zero, isto é:

$$D = \mathbb{R}^* \quad I = \mathbb{R}^* \tag{2.17}$$

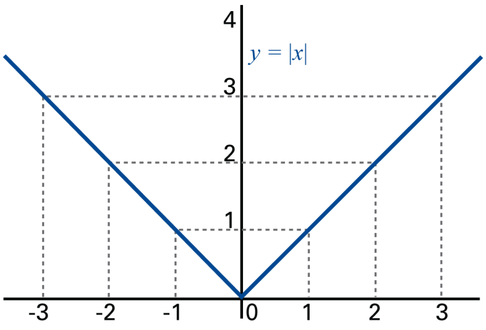

Figura 2.13: Gráfico da função módulo de x.

A função módulo de x, representada por $|x|$, é definida a partir da definição do módulo de um número real, isto é:

$$f_3(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

O gráfico da função módulo de x é apresentado na **Figura 2.13**.

A função definida como a raiz quadrada da variável x é definida por:

$$f_4(x) = \sqrt{x} \tag{2.19}$$

Ela associa a todo número real positivo ou nulo o valor da sua raiz quadrada. Note-se que o domínio D, bem como o conjunto imagem I, da função raiz quadrada é o conjunto definido por:

$$D = I = \mathbb{R}_+ \tag{2.20}$$

o conjunto dos reais positivos ou iguais a zero, isto é, dos números reais não negativos.

Finalmente, introduzimos a função quadrática ou função polinomial do segundo grau, mais simples entre todas. Escrevemos:

$$f_5(x) = x^2 \qquad 2.21$$

Nesse caso, o domínio da função é $\mathbb{R}$ enquanto o conjunto imagem I dessa função é o conjunto dos números reais não negativos, isto é:

$$D = \mathbb{R} \quad I = \{x \in R \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}_+ \qquad 2.22$$

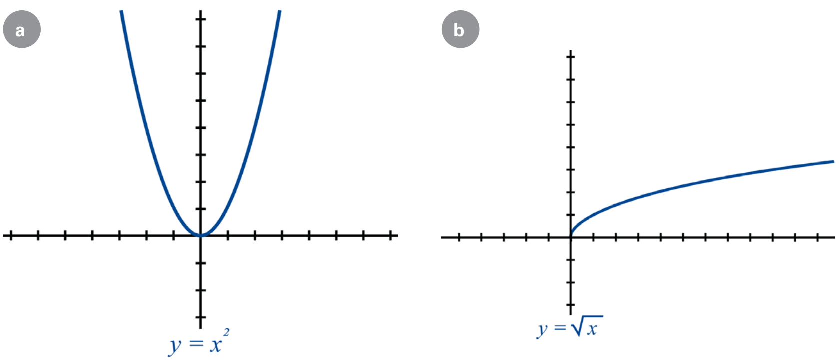

Figura 2.14: a) Gráfico da função quadrática **b)** Gráfico da função da raiz quadrada.

Mediante a multiplicação de uma função por um número real, a, obtemos outra função. A adição de funções gera, igualmente, uma nova função. Assim, a partir de **2.21** e **2.16**, podemos escrever uma nova função dada por:

$$f_6(x) = af_5(x) + bf_2(x) = ax^2 + b\frac{1}{x} \qquad 2.23$$

Também podemos multiplicar funções, obtendo uma nova função, bem como fazer a divisão de uma função por outra. Em cada caso é preciso sempre estar atento ao domínio da nova função.

Exemplo

Um exemplo simples pode ser o seguinte:

$$f(x) = x^2 + 1$$
$$g(x) = 3x$$

A função produto de f e g é:

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) = 3x(x^2 + 1)$$

e a função quociente de f e g é:

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 1}{3x}$$

Vale observar que:

- domínio de f: $\mathbb{R}$
- domínio de g: $\mathbb{R}$
- domínio de h: $\mathbb{R}$
- domínio de k: $\mathbb{R}^*$

2.5 Funções compostas

Sejam duas funções g e f. A partir delas pode-se definir duas funções compostas. A função composta de g com f, $g \circ f$, é a função definida por:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] \tag{2.24}$$

A função composta de f com g, $f \circ g$, é a função definida por:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] \tag{2.25}$$

Repare que a operação de composição de funções não é comutativa, isto é, em geral as funções definidas anteriormente são diferentes.

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x) \qquad 2.26$$

Exemplos

Dadas as funções definidas por $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = x^2$

Determine:

a) $(f \circ g)(x)$ e **b)** $(g \circ f)(x)$

→ Resolução:

a) Consideremos primeiramente o caso a)

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 3x - 1 \\ g(x) = x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2)$$

Assim, para obtermos a função composta devemos, na função f, colocar x^2 no lugar de x;

$$f(g(x)) = f(x^2) = 3(x^2) - 1 = 3x^2 - 1$$

b) No caso b), consideramos

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = x^2 \\ f(x) = 3x - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 1)$$

Agora, na função g, no lugar de x colocamos $3x - 1$:

$$g(f(x)) = g(3x - 1) = (3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$$
$$g(f(x)) = 9x^2 - 6x + 1$$

E isso demonstra a afirmação expressa em **2.26**.

2.6 Função inversa

Definimos a função inversa de f, designada por $f^{-1}(x)$, como a função que, quando composta com f, leva-nos à função identidade, ou seja,

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x \qquad 2.27$$

Na expressão acima assumimos que f seja uma função inversível, isto é, que ela admita uma função inversa.

Exemplos

Dada a função

$f(x) = 2x - 3,$

determine $f^{-1}(x)$

→ Resolução:

Fazemos $y = f(x)$

$$y = 2x - 3 \qquad (\mathrm{I})$$

Em seguida, na equação (I) isolamos x:

$$y = 2x - 3 \Leftrightarrow 2x = y + 3 \Leftrightarrow x = \frac{y+3}{2} \qquad (\mathrm{II})$$

Agora, na equação (II) trocamos x por y (e y por x):

$$y = \frac{x+3}{2}$$

Assim: $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$

Verifiquemos que

$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x$ e que $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$

De fato, $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) =$

$$= f\left(\frac{x+3}{2}\right) = 2.\left(\frac{x+3}{2}\right) - 3 = x$$

e $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}(2x-3) = \dfrac{2x-3+3}{2} = x$

2.7 Outras definições

Uma função é considerada uma **função par** se para ela vale a propriedade:

$$f(-x) = f(x) \tag{2.28}$$

Definimos uma função como uma **função ímpar** se para ela vale:

$$f(-x) = -f(x) \tag{2.29}$$

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y, enquanto o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

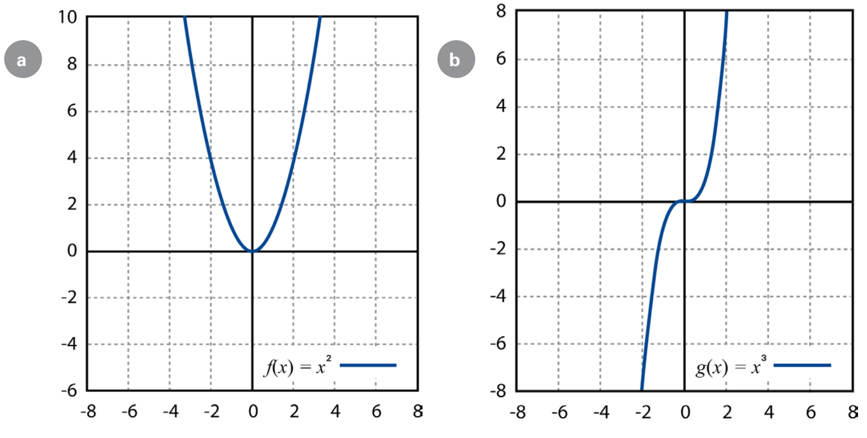

Figura 2.15: Gráficos típicos de uma função par **(a)** e de uma função ímpar **(b)**.

Uma **função periódica** de período p é aquela para a qual se aplica a seguinte propriedade:

$$f(x+p) = f(x) \tag{2.30}$$

Um gráfico típico de uma função periódica é apresentado na **Figura 2.16**.

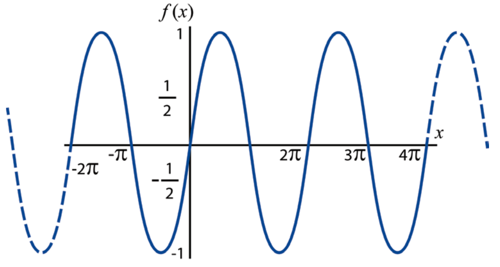

Figura 2.16: gráfico de uma função periódica de período 2π.

Uma função é estritamente crescente num intervalo I se, para dois elementos a e b quaisquer pertencentes ao intervalo $(a,\ b \in I)$, vale a propriedade:

$$a > b \quad \Rightarrow \quad f(a) > f(b) \tag{2.31}$$

Uma função é estritamente decrescente num intervalo I se, para dois elementos a e b quaisquer pertencentes ao intervalo $(a,\ b \in I)$, vale a propriedade

$$a > b \quad \Rightarrow \quad f(a) < f(b) \tag{2.32}$$

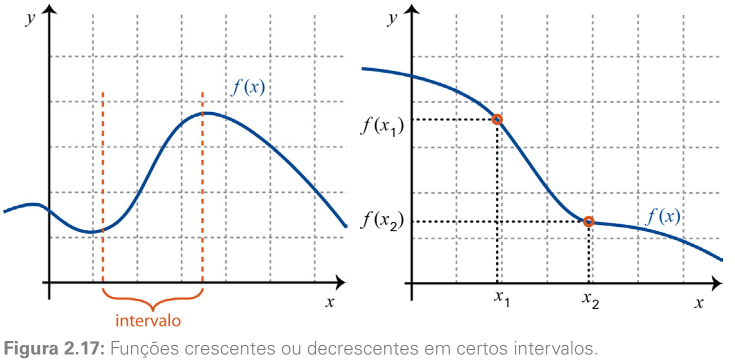

Figura 2.17: Funções crescentes ou decrescentes em certos intervalos.

2.8 Exemplos simples

O conceito de função é importante na física e em outras áreas do conhecimento porque muitas vezes uma grandeza física, y, depende de outra ou outras, usualmente o tempo ou as coordenadas. No caso de apenas uma variável independente representaremos tal dependência da seguinte forma:

$$y = f(x) \tag{2.33}$$

que se lê y é função de x.

Na mecânica, a variável independente é o tempo. As variáveis que podem depender do tempo são as coordenadas, a velocidade, a aceleração e, em alguns casos, a própria força.

Nos exemplos abaixo, tanto o domínio da função quanto o contradomínio são o conjunto $\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais.

O primeiro exemplo a ser considerado vem da geometria. A área A de um quadrado depende do comprimento de um dos seus lados. Se ℓ representa esse comprimento, essa dependência se escreve:

$$A = \ell^2 \tag{2.34}$$

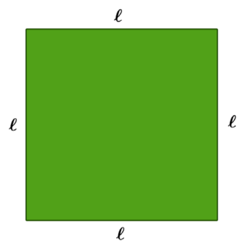

Figura 2.18: A área do quadrado é função do seu lado ℓ.

Um exemplo simples da mecânica ilustra o conceito de função. Trata-se de um exemplo envolvendo uma dependência linear entre grandezas. Consideremos um corpo de massa m que esteja apoiado num plano horizontal e preso na extremidade de uma mola. Consideremos ainda o caso em que a outra extremidade da mola esteja fixada numa parede vertical. Sem que haja qualquer tipo de interferência no sistema massa-mola, o conjunto permanecerá em repouso. E isto ocorre quando a mola não está sujeita a nenhuma deformação.

Se, no entanto, esticarmos ou comprimirmos a mola (puxando ou empurrando o corpo até uma nova posição), vamos notar que ela exerce uma força, F, sobre o corpo de massa m. Essa força, denominada força elástica, age de forma a restaurar a posição original, a posição de

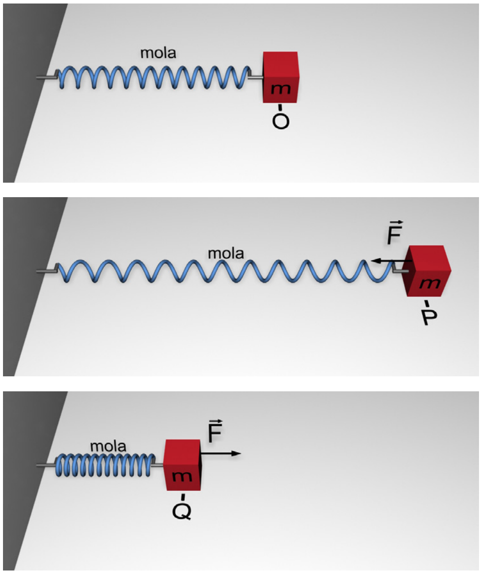

Figura 2.19: Mola em diferentes situações e o sentido da força em cada caso.

equilíbrio. Se adotarmos a convenção de que a origem da coordenada associada ao deslocamento coincida com o ponto no qual não existem forças sobre a mola (a posição de equilíbrio), podemos escrever a dependência da força em relação à coordenada da seguinte forma:

$$F = -kx \tag{2.35}$$

onde k é uma constante denominada constante elástica da mola. Observe que, se aumentarmos o valor do deslocamento, em módulo, a força aumentará. O sinal menos assegura que ela está sempre no sentido do ponto de equilíbrio. Nesse ponto, a força é nula.

Um exemplo extraído da gravitação diz respeito ao tempo de queda de um corpo, uma vez solto de uma altura h. Tal tempo depende da aceleração da gravidade e depende da raiz quadrada da altura. O tempo de queda pode ser visto como dependente desses dois parâmetros. Visto como dependente da altura, escrevemos essa dependência como a função:

$$T_{\text{queda}} = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{h} \tag{2.36}$$

O gráfico dessa função, para diferentes valores da altura, é representado na **Figura 2.20**.

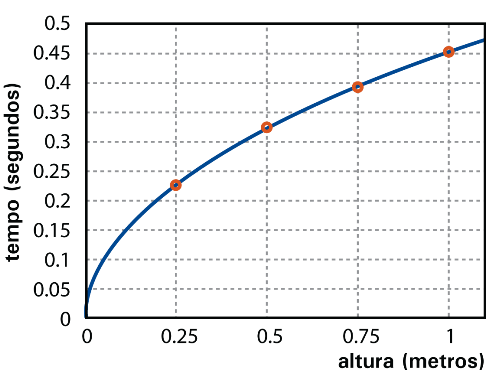

Figura 2.20: Gráfico do tempo de queda como função da altura.