APLICAÇÕES À GEOMETRIA ANALÍTICA 3

Gil da Costa Marques

3.1 Introdução

Geometria é um ramo da matemática que estuda as propriedades do espaço e as figuras que ele comporta. No caso das figuras, procuramos analisar suas formas, tamanhos, posições relativas, bem como deduzimos resultados (Teoremas ou Proposições) que podem ser obtidos a partir de alguns postulados. As figuras contidas num plano são alvo de estudo da geometria dita plana. As figuras tridimensionais são estudadas na geometria espacial.

Um pouco de história

Segundo os historiadores, a geometria teve início cerca de 3.000 anos antes de Cristo no Egito. A necessidade de medir com precisão as terras constantemente demarcadas após as sucessivas inundações do Nilo, ou o uso dessas demarcações para efeito de pagamento de impostos, constituiu-se no pano de fundo desse desenvolvimento inicial da geometria. A palavra geometria advém desses primeiros esforços de "medidas da terra". Os babilônicos introduziram aperfeiçoamentos nessa área do conhecimento, a qual foi consolidada pelos gregos. O marco dessa consolidação foi a coletânea de livros *Os Elementos*, escritos por Euclides.

A geometria experimentou grandes revoluções ao longo da História. A primeira delas deve ser creditada a René Descartes, que introduziu a Geometria Analítica. Bolyai, Lobatchesvky, Gauss e Riemmann desenvolveram geometrias não Euclidianas. Einstein associou uma propriedade do espaço à matéria nele existente. A Teoria das Cordas e a Teoria M propõem espaços com mais de três dimensões.

Na geometria analítica, o conceito de função tem um papel central, com aplicações tanto na geometria plana quanto na geometria espacial. Em **Aplicações à geometria analítica**, analisaremos aplicações do conceito de função no estudo das retas, semirretas, segmentos de reta, bem como de algumas figuras planas, especialmente polígonos, e, finalmente, as cônicas.

Na geometria analítica, o espaço é pensado como um conjunto (infinito) de pontos. Assim, ao introduzir a ideia de ponto no espaço, somos levados a pensar em como caracterizar cada ponto desse espaço. Com isso, procuramos dar uma definição mais operacional para esse conceito. Isso pode ser feito uma vez introduzido um referencial. Adotado um determinado sistema de referência, cada ponto do espaço pode ser especificado a partir das suas coordenadas. Um ponto pode ser especificado por meio das coordenadas cartesianas (x, y, z). Temos, assim, uma correspondência biunívoca entre o conjunto de pontos do espaço e o conjunto das ternas ordenadas de números reais.

3.2 Relações e funções

Consideremos uma relação entre as coordenadas (x,y) no plano, que pode ser escrita genericamente como:

$$F(x,y)=0 \qquad 3.1$$

Uma curva no plano pode ser escrita como uma relação da forma acima. Por exemplo, a circunferência de centro na origem é definida como a curva para a qual vale a seguinte relação:

$$x^2+y^2=R^2 \qquad 3.2$$

onde R é o raio da circunferência.

Na relação **3.2** temos duas funções implícitas. A primeira delas é a função:

$$y^+(x)=+\sqrt{R^2-x^2} \qquad 3.3$$

que descreve um arco da circunferência. A segunda é a função:

$$y^-(x)=-\sqrt{R^2-x^2} \qquad 3.4$$

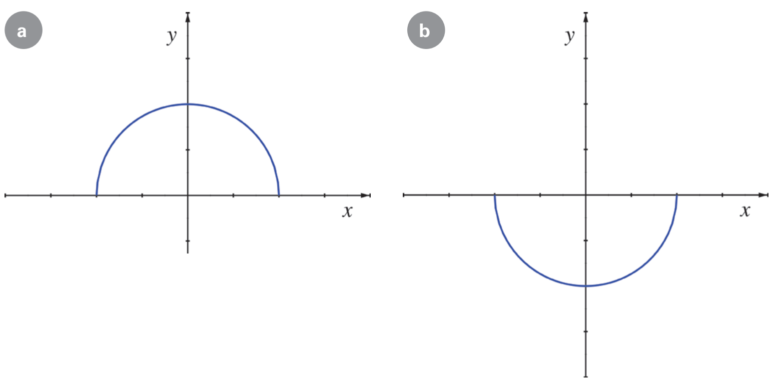

Figura 3.1: Arcos de circunferência descritos por funções.
Em **a)** temos $y^+(x)=+\sqrt{R^2-x^2}$. Em **b)** temos $y^-(x)=-\sqrt{R^2-x^2}$.

3.3 Retas e segmentos de retas no plano

Estabelecemos uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos pontos do plano e o conjunto dos pares ordenados de números reais. A cada ponto do plano corresponde um único par ordenado de números reais e reciprocamente:

$$P \Leftrightarrow (x, y) \tag{3.5}$$

Dizemos então que as coordenadas do ponto P são dadas pelo par ordenado (x, y), isto é, $P = (x, y)$, onde x é a abscissa de P e y é a sua ordenada.

Considerando uma reta contida no plano xy (no espaço, esse plano é o plano caracterizado pela equação $z = 0$), sua expressão mais geral é:

$$y = ax + b \tag{3.6}$$

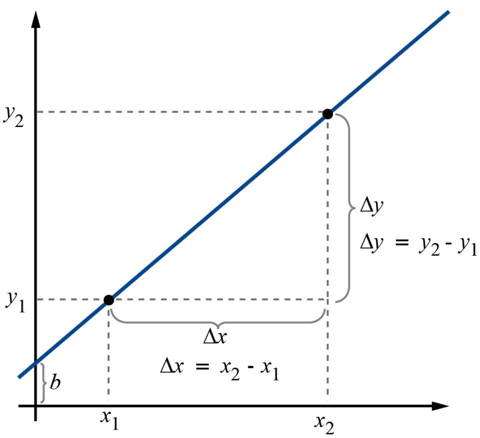

Figura 3.2 O gráfico da função afim.

ou seja, a equação que relaciona as coordenadas x e y dos pontos que pertencem à reta é uma equação do primeiro grau. Muitas vezes, especialmente quando y e x se referem a grandezas físicas, referimo-nos às constantes a e b como parâmetros.

Um gráfico típico de uma função polinomial de primeiro grau, também chamada função afim (aquela sob a forma da expressão **3.6**), é apresentado na **Figura 3.2**.

O parâmetro b, denominado coeficiente linear da reta, pode ser facilmente identificado com o valor da ordenada y quando $x = 0$, ou seja, ele corresponde ao valor da função para esse valor de x:

$$y(0) = b \tag{3.7}$$

O parâmetro a é denominado coeficiente angular da reta. Para determiná-lo, basta considerar dois pontos P_1 e P_2, que pertencem à reta e cujas coordenadas são:

$$\begin{aligned} P_1 &= (x_1, y_1) \\ P_2 &= (x_2, y_2) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Da expressão **3.6**, uma vez que os pontos pertencem à reta, segue-se que:

$$\begin{aligned} y_1 &= ax_1 + b \\ y_2 &= ax_2 + b \end{aligned} \tag{3.9}$$

Subtraindo a primeira da segunda equação, encontramos:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{3.10}$$

desde que $x_2 - x_1 \neq 0$, isto é, P_1 e P_2 não estão numa mesma reta perpendicular ao eixo x.

Uma reta não perpendicular ao eixo x é inteiramente caracterizada pelo seu coeficiente angular (a) e pelo ponto $(0, b)$ no qual a reta intercepta o eixo y.

A partir de um ponto $A = (x_A, y_A)$ localizado sobre uma reta, podemos determinar duas semirretas. Cada uma delas é caracterizada como o lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem a expressão **3.6**, bem como a uma das duas condições:

$$\begin{aligned} x &\geq x_A \\ x &\leq x_A \end{aligned} \tag{3.11}$$

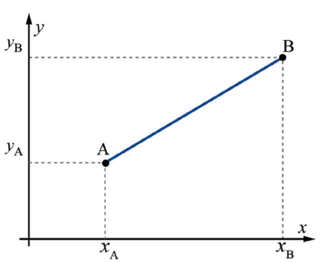

Figura 3.3: Segmento de reta.

Dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ sobre uma reta determinam um segmento de reta. Este, por outro lado, é definido como o lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem a expressão **3.6**, bem como à condição:

$$x_A \leq x \leq x_B \tag{3.12}$$

3.3.1 Posição relativa de duas retas

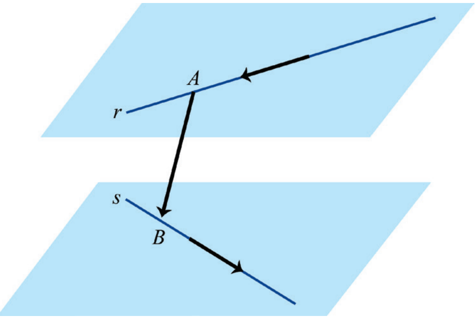

Figura 3.4: Retas reversas.

No espaço tridimensional, pode-se falar de 3 posições relativas de duas retas.

Diz-se que duas retas são reversas quando elas não estão contidas na mesma superfície plana, ou seja, não há um plano que contenha as duas retas. Nesse caso, as retas não se encontram.

Consideremos agora as duas situações possíveis quando duas retas estão contidas no mesmo plano.

Duas retas coplanares são ditas paralelas quando não têm ponto em comum. Examinando as equações de duas retas paralelas, o sistema de duas equações a duas incógnitas não deve ter solução, uma vez que não existe um ponto que esteja nas duas retas ao mesmo tempo. Sendo assim, se

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 x + b_1 \\ y_2 &= a_2 x + b_2 \end{aligned} \qquad (3.13)$$

então,

$$a_2 = a_1 \qquad (3.14)$$

isto é, retas paralelas têm o mesmo coeficiente angular e suas equações diferem, portanto, apenas no que diz respeito ao parâmetro b.

Quando duas retas coplanares r e s não são paralelas, elas se interceptam em algum ponto P no plano. Nesse caso, dizemos que as retas são concorrentes.

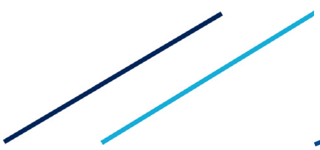
Figura 3.5: Retas paralelas.

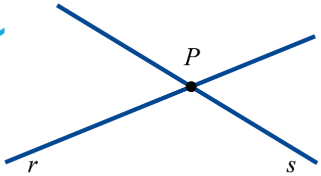

Figura 3.6: Retas concorrentes.

O ponto de intersecção das duas retas pode ser obtido resolvendo o sistema de duas equações a duas incógnitas:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 x + b_1 \\ y_2 &= a_2 x + b_2 \end{aligned} \qquad (3.15)$$

Seja P = (x_P, y_P) o ponto comum às duas retas. Temos então:

$$y_1 = y_2 = y_P \qquad \Rightarrow a_1 x_P + b_1 = a_2 x_P + b_2 \quad \Rightarrow \quad x_P = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \tag{3.16}$$

Note que $a_1 - a_2 \neq 0$ pois as retas não são paralelas.

$$y_P = a_2 x_P + b_2 \quad \Rightarrow \quad y_P = a_2 \left(\frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \right) + b_2$$

Por exemplo, o ponto de encontro das retas:

$$\begin{aligned} y_1 &= 5x - 4 \\ y_2 &= 3x + 2 \end{aligned} \tag{3.17}$$

tem coordenadas (3, 11).

3.4 Ângulos e medidas de ângulos

Consideremos o caso de duas retas concorrentes. As semirretas *r* e *s*, que se originam no ponto de intersecção, têm inclinações diferentes. Para medir a inclinação definimos a grandeza ângulo. Ângulos podem ser medidos, uma vez que podem ser comparados. No plano, com um sistema de coordenadas, o ângulo especifica a inclinação de uma reta com relação ao eixo horizontal. No caso de duas retas concorrentes, o ângulo entre elas especifica quão inclinadas as duas retas estão uma em relação à outra.

Para entender o conceito de ângulo, consideremos circunferências concêntricas desenhadas a partir de um ponto P. Consideremos agora a relação entre o comprimento do arco e o raio da circunferência. Dadas duas retas quaisquer, concorrentes no ponto P, essa relação não depende do raio da circunferência, no sentido de que, se o raio aumenta, o comprimento do arco aumenta na mesma proporção, e o quociente entre o comprimento do arco e o raio permanece constante. É uma característica das direções relativas: a inclinação entre elas.

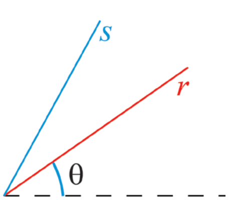

Figura 3.6: Ângulo como medida de inclinação.

Podemos , como veremos a seguir, fazer uso de duas unidades de medida de ângulos.

Em Física, é muito comum, no estudo do movimento circular, o uso de variáveis angulares. Assim, é importante entender como medimos ângulos. Na medida de um ângulo podemos utilizar qualquer uma das duas unidades: grau ou radiano.

No caso do grau, dividimos a circunferência completa em 360 partes iguais. Um grau é a medida do ângulo central determinado por uma dessas partes.

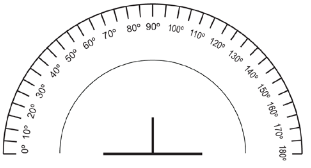

Figura 3.7: Com o transferidor medimos ângulos em graus.

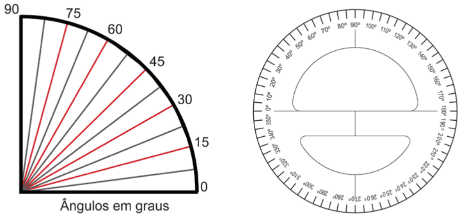

Figura 3.8: Definição de grau como unidade de medida de ângulos.

Sugerimos aqui que se dê uma boa olhada no transferidor. A medida de um ângulo em graus é efetuada determinando-se quantas vezes o ângulo é maior do que aquele de um grau.

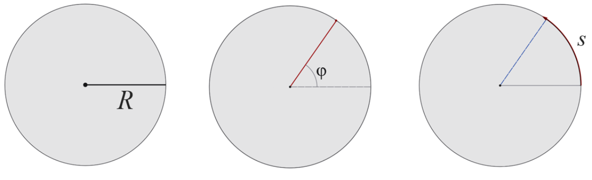

Figura 3.9: Definição de radiano como unidade de medida de ângulos.

Para a medida do ângulo em radianos, determinamos o comprimento do arco associado a ele e o dividimos pelo valor do raio. Temos, portanto:

$$\varphi = \frac{s}{R} \tag{3.18}$$

A circunferência toda corresponde a 2π radianos. Portanto, ao valor de 360° correspondem 2π radianos.

Voltando à equação da reta

$$y = ax + b \tag{3.19}$$

que passa pelos pontos

$$\begin{aligned} P_1 &= (x_1, y_1) \\ P_2 &= (x_2, y_2) \end{aligned} \tag{3.20}$$

que têm abscissas diferentes, podemos escrever seu coeficiente angular, em termos do ângulo θ que ela forma com o eixo x, como:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{tg}\theta \qquad 3.21$$

3.4.1 Mais sobre ângulos

Levando-se em conta a possibilidade de três retas serem concorrentes num único ponto, isto é, existir um ponto comum a todas elas, os ângulos formados, em relação a uma delas, são ângulos adjacentes (**Figura 3.10**).

Duas retas concorrentes definem quatro ângulos. Os pares de ângulos não adjacentes são denominados opostos pelo vértice (**Figura 3.11**).

Os ângulos opostos pelo vértice são iguais.

O ângulo entre duas retas de coeficientes angulares definidos pelos ângulos θ_1 e θ_2 é dado pela diferença desses ângulos:

$$\theta = \theta_1 - \theta_2 \qquad 3.22$$

Dois ângulos são complementares se a soma de suas medidas for igual a 90° (**Figura 3.12**).

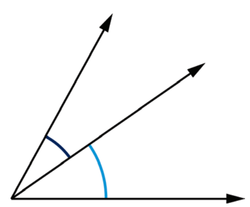

Figura 3.10: Ângulos adjacentes.

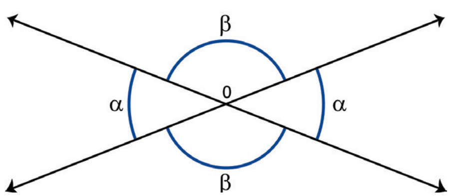

Figura 3.11: Ângulos opostos pelo vértice.

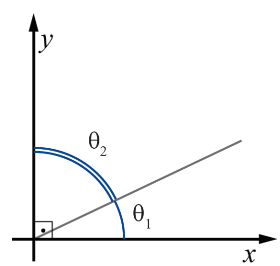

Figura 3.12: Ângulos complementares.

Ângulo reto é aquele cuja medida é igual a 90°. Ângulo raso é aquele cuja medida é igual a 180°.
Ângulos agudos são aqueles cujas medidas são menores do que 90°.
Ângulos obtusos são aqueles cujas medidas excedem 90°.

Dizemos que duas retas concorrentes são perpendiculares se qualquer um dos quatro ângulos por elas formados for um ângulo reto.

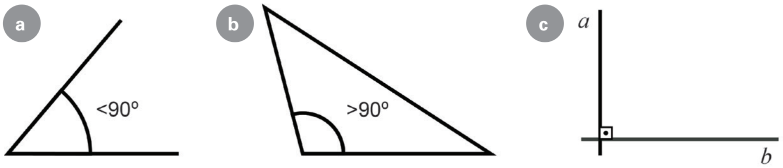

Figura 3.13: a) Um ângulo agudo **b)** Um ângulo obtuso **c)** Duas retas perpendiculares.

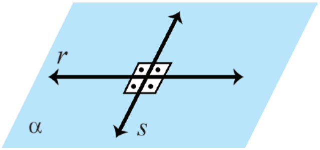

Figura 3.14: Retas perpendiculares em perspectiva.

Retas perpendiculares obedecem à seguinte relação entre seus coeficientes angulares:

$$a_1 = -\frac{1}{a_2} \quad (3.23)$$

Por exemplo, as retas

$$\begin{aligned} y_1 &= 5x - 4 \\ y_2 &= -\frac{1}{5}x + 3 \end{aligned} \quad (3.24)$$

são perpendiculares.

3.5 Polígonos

Uma classe relevante de figuras planas são aquelas que podem ser geradas a partir de um conjunto de pontos A_1, A_2, ...A_n pertencentes ao plano. Analisaremos o caso em que nenhum conjunto de três deles, contíguos, pertencem a uma mesma reta.

Cada um desses pontos tem coordenadas dadas por:

$$A_1 = (x_1, y_1); A_2 = (x_2, y_2); ...; A_i = (x_i, y_i); ...; A_n = (x_n, y_n) \quad (3.25)$$

A distância $d(A_1, A_2)$ entre dois pontos A_1 e A_2 no plano é dada pela expressão:

$$d(A_1, A_2) = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2} \quad (3.26)$$

Suponhamos que os pontos A_1, A_2, ..., A_n sejam ligados por segmentos de reta, sucessivamente, isto é, unimos o ponto A_1 ao ponto A_2, depois A_2 ao ponto A_3, e assim por diante até voltarmos ao ponto A_1.

Algumas das figuras geradas por meio do procedimento acima têm um grande apelo estético.

Em **Aplicações à geometria analítica**, analisaremos as curvas resultantes do processo acima descrito quando utilizamos segmentos de reta para interligar os pontos em sucessão. A curva resultante tem o nome de polígono.

Os pontos A_1, A_2, ..., A_n são denominados vértices do polígono. O segmento entre cada par de pontos é denominado lado do polígono.

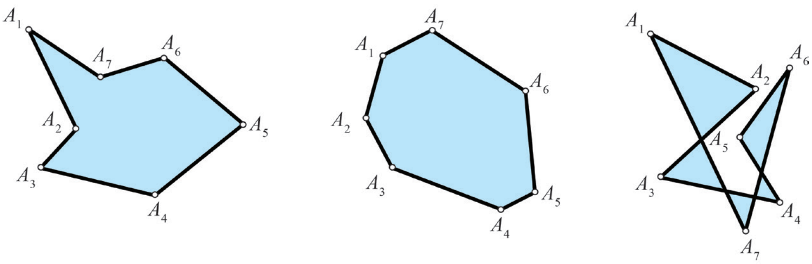

Figura 3.15: Polígonos Irregulares.

Podemos classificar os polígonos em côncavos e convexos. Estes últimos são mais interessantes, pois eles incluem os polígonos regulares não estrelados.

Para entender a diferença entre as duas categorias, basta considerar a reta que contém algum dos lados. Podemos agora antever duas situações: para pelo menos um dos lados a reta aludida acima corta o polígono, ou para nenhum dos lados isso ocorre. Neste último caso, dizemos que o polígono é convexo. De outra forma, isto é, no primeiro caso, ele é dito côncavo.

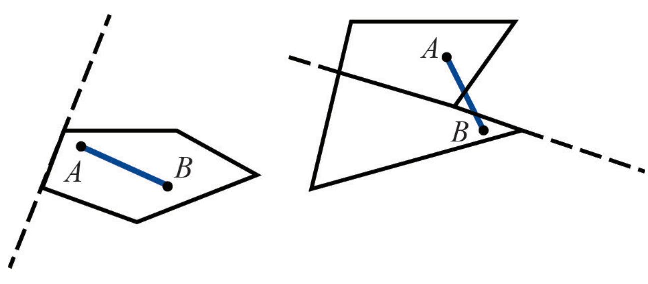

Figura 3.16: À esquerda, um polígono convexo; à direita, um polígono côncavo.

Nomeamos os polígonos de acordo com o número de seus lados. Triângulos são polígonos com três lados. São denominados quadriláteros aqueles com quatro lados. Dando continuidade à nomenclatura, utilizamos sempre os prefixos gregos para designá-los. Eles são chamados pentágonos (aqueles com 5 lados), hexágonos (os que contêm 6 lados), heptágonos (7), octógonos (8), eneágonos (9), decágonos (10), e assim por diante.

São chamados polígonos regulares aqueles que têm todos os lados congruentes (de mesmo comprimento), bem como são congruentes todos os ângulos (de mesma medida). O fato notável em relação aos polígonos regulares é poderem todos eles ser construídos com os instrumentos euclidianos: a régua e o compasso. Para construí-los devemos saber como dividir uma circunferência em partes iguais.

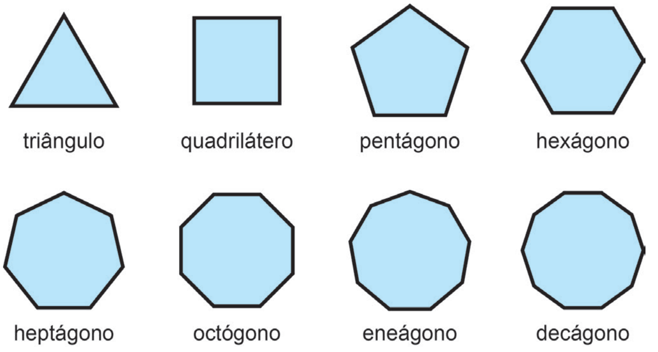

Figura 3.17: Polígonos regulares.

Chama-se trilátero o polígono de três lados, ou seja, triângulo e trilátero são nomes dados ao mesmo polígono. Um triângulo é **equilátero** quando seus três lados são congruentes; um triângulo **isósceles** é aquele que tem 2 lados congruentes e um triângulo **escaleno** é aquele que tem 3 lados de comprimentos diferentes. Um triângulo é dito **retângulo** quando tem um ângulo reto; um triângulo é **obtusângulo** quando tem um ângulo obtuso; um triângulo é **acutângulo** quando tem os 3 ângulos agudos.

Entre as figuras que têm 4 lados – os quadriláteros – o quadrado é aquele que tem os 4 lados de mesmo comprimento e os 4 ângulos de mesma medida.

O perímetro de um polígono é dado pela soma dos comprimentos de seus lados, isto é,

$$P = d(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2) + d(\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3) + \cdots + d(\mathrm{A}_{n-1}, \mathrm{A}_n) + d(\mathrm{A}_n, \mathrm{A}_1) \quad 3.27$$

A área S de um polígono pode ser expressa em função das coordenadas dos pontos $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$. Assim, no caso de um triângulo, no espaço, podemos escrever sua área em função das coordenadas dos vértices como:

$$S = \frac{1}{2}\left[\left(y_1 + y_2\right)\left(x_1 - x_2\right) + \left(y_2 + y_3\right)\left(x_2 - x_3\right) + \left(y_3 + y_1\right)\left(x_3 - x_1\right)\right] \tag{3.28}$$

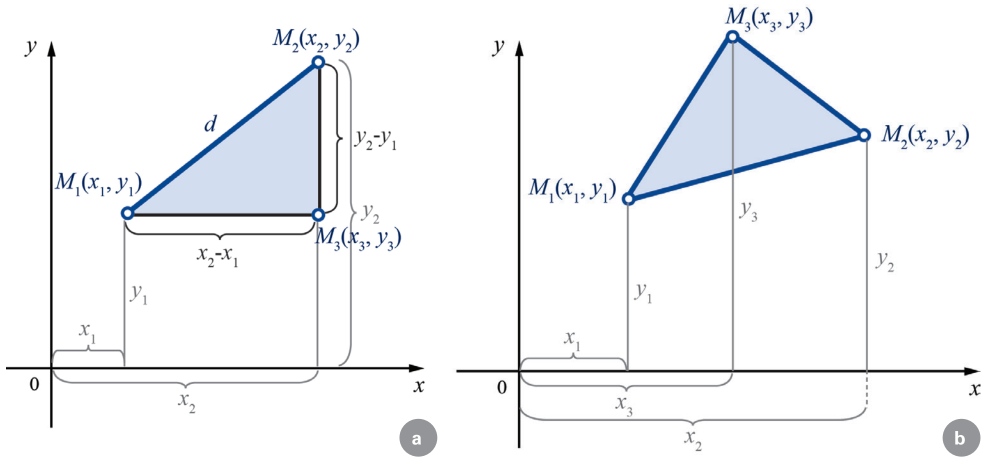

Figura 3.18: A área de um triângulo, um polígono de três lados, pode ser calculada por meio das coordenadas de seus vértices. No exemplo **a)** um triângulo retângulo e, em **b)** um triângulo qualquer.

3.6 Cônicas

As cônicas são curvas obtidas pela intersecção da superfície de um cone circular reto de duas folhas com um plano. A seguir, apresentaremos de maneira sucinta as cônicas não degeneradas, isto é, a parábola, a elipse e a hipérbole. Como veremos adiante, uma circunferência é uma particular elipse.

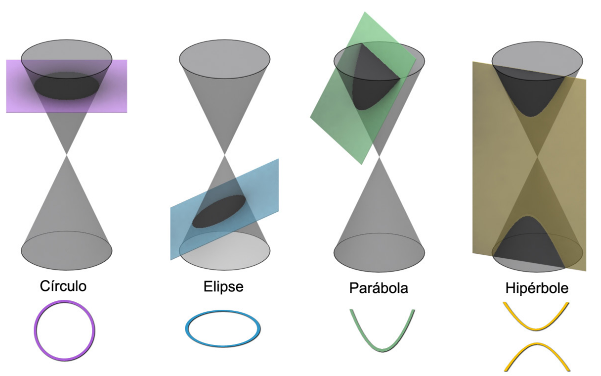

Figura 3.19: As curvas cônicas.

3.6.1 Parábola

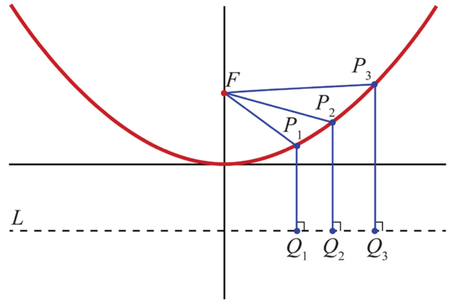

Figura 3.20: A definição de parábola como lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de uma reta e de um ponto.

Num plano, consideremos uma reta r e um ponto não pertencente a ela. Uma parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que se situam a distâncias iguais do ponto (denominado foco) e da reta, que é conhecida como diretriz (vide **Figura 3.20**). Essa definição é atribuída a Pappus.

A distância entre dois pontos é dada pela expressão **3.26**.

Considerando um sistema cartesiano em que o foco da parábola é o ponto F = (0, p), isto é, o foco se encontra no eixo vertical, a distância de um ponto qualquer, P = (x, y), sobre a parábola até o foco F será dada por:

$$d(\text{P},\text{F}) = \sqrt{x^2 + (y-p)^2} \quad (3.29)$$

A distância desse ponto P = (x, y) até a reta diretriz, cuja equação é $y = -p$, é definida como a diferença entre as ordenadas do ponto P e do ponto, de mesma abscissa de P, que está na diretriz. Assim,

$$d(\text{P},r) = y - (-p) = y + p \quad (3.30)$$

Igualando as duas distâncias, obtemos:

$$y + p = \sqrt{x^2 + (y-p)^2} \quad (3.31)$$

donde obtemos a coordenada y de um ponto sobre a parábola como função da coordenada x. Explicitamente, escrevemos:

$$y = 4px^2 \quad (3.32)$$

A equação geral da parábola, quando a escrevemos em termos das coordenadas cartesianas, é expressa sob a forma de uma função polinomial de segundo grau, a qual pode ser escrita de duas formas inteiramente equivalentes:

$$y(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \tag{3.33}$$

onde o termo Δ é dado por

$$\Delta = b^2 - 4ac \tag{3.34}$$

Considerando um referencial cartesiano deslocado, de tal forma que a origem desse novo sistema coincida com o ponto que é o vértice da parábola $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$, então, no novo sistema cartesiano $x'y'$, $V_{x'y'} = (0,0)$, e um ponto $P = (x, y)$ no sistema inicial será escrito no novo sistema como $P = (x', y') = \left(x + \frac{b}{2a}, y + \frac{\Delta}{4a}\right) = \left(x + \frac{b}{2a}, y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

Assim, no novo sistema de coordenadas, a equação da parábola é:

$$y'(x') = a(x')^2 \tag{3.35}$$

onde, a partir de **3.32,** a constante a é dada em termos da ordenada do foco como

$$a = 4p \tag{3.36}$$

Vale notar, portanto, que efetuar translações ao longo dos eixos x e y corresponde a fazer uma mudança do sistema de coordenadas.

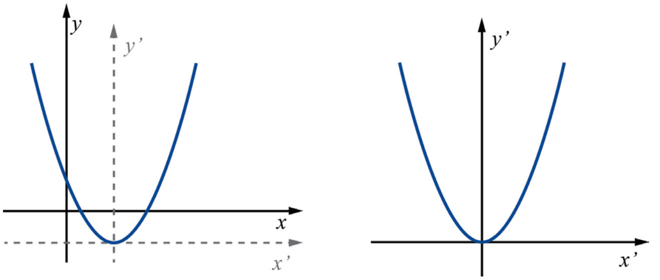

Figura 3.21: Por meio da mudança do sistema de coordenadas podemos simplificar a expressão de uma função quadrática.

A parábola é uma cônica. Isso porque ela pode ser obtida como a intersecção da superfície do cone com um plano que é paralelo à geratriz da superfície, de acordo com a **Figura 3.22**.

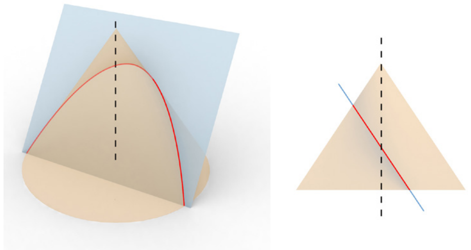

Figura 3.22: A parábola como uma cônica.

3.6.2 Elipse

Seja dado um número real positivo a. No plano, consideremos dois pontos, denominados focos, que distam um dado valor $2c$, onde c é um número real positivo, $c < a$. Uma elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano, cuja soma das distâncias aos focos é igual a $2a$. Ou seja, sendo r e r' tais distâncias, escrevemos para os pontos localizados sobre a elipse:

$$r + r' = 2a \tag{3.37}$$

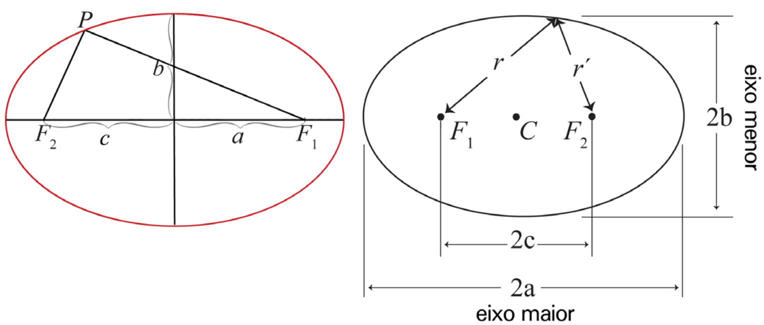

Figura 3.23: Definição da elipse como lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $PF_1 + PF_2 = 2a$, onde $F_1F_2 = 2c$, $c < a$.

Adotando um sistema cartesiano de forma que a origem coincida com o centro da elipse (vide **Figura 3.23**), temos que os focos são os pontos de coordenadas $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$ ou

$$F_1 = (\varepsilon a, 0) \qquad F_2 = (-\varepsilon a, 0) \tag{3.38}$$

onde ε é um parâmetro, menor do que 1 e maior do que 0, conhecido como excentricidade da elipse,

$$\varepsilon = c/a.$$

A partir da definição de elipse, a soma das distâncias nos leva à identidade:

$$\sqrt{(x-\varepsilon a)^2+(y)^2}+\sqrt{(x+\varepsilon a)^2+(y)^2}=2a \tag{3.39}$$

Depois de algumas manipulações relativamente simples, a equação **3.39** é equivalente à equação:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{y^2}{a^2(1-\varepsilon^2)}=1 \tag{3.40}$$

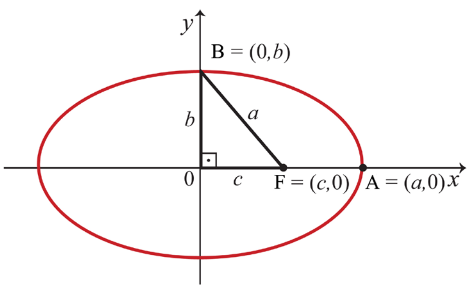

Figura 3.24: Na elipse, $a^2 = b^2 + c^2$.

Tendo em vista que na elipse os dois semieixos – maior e menor – e a metade da distância focal se relacionam conforme o Teorema de Pitágoras (**Figura 3.24**):

$$a^2=a^2\varepsilon^2+b^2 \Rightarrow b=a\sqrt{1-\varepsilon^2} \tag{3.41}$$

a equação para a elipse pode ser escrita como:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1 \tag{3.42}$$

A relação acima não define uma função. No entanto, se analisarmos os dois ramos da elipse (a parte acima do eixo x e a parte abaixo desse eixo), então, podemos considerar os gráficos de duas funções:

$$\begin{aligned} y^+ &= b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} \\ y^- &= -b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} \end{aligned} \tag{3.43}$$

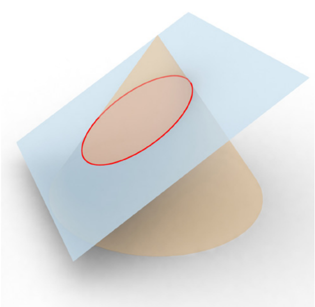

Figura 3.25: A elipse como uma cônica.

Com as ferramentas do Cálculo Integral será possível mostrar que a área de uma elipse é dada pela expressão:

$$A=\pi ab \tag{3.44}$$

A elipse é uma cônica, resultante de intersecção de um plano com uma superfície cônica (vide **Figura 3.25**).

3.6.3 Circunferência

A circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de um ponto dado, denominado centro da circunferência. Essa distância é identificada com o comprimento característico da circunferência – o seu raio.

Uma circunferência é uma particular elipse, cujos semieixos – maior e menor – são iguais. Consequentemente, numa circunferência, não existem os focos (pois $c = 0$ na caracterização da elipse, conforme **Figura 3.24**). Então, uma circunferência é uma elipse cuja excentricidade é nula ($\varepsilon = 0$). Escrevemos dessa maneira:

$$r = a = R_C \tag{3.45}$$

3.6.4 Hipérbole

Seja dado um número real positivo a. Num plano, consideremos dois pontos, denominados focos, que distam um dado valor $2c$, onde c é um número real positivo, $c > a$. Uma hipérbole é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja diferença das distâncias aos focos é, em valor absoluto, igual a $2a$. Ou seja, sendo r e r' tais distâncias, escrevemos para os pontos localizados sobre a hipérbole:

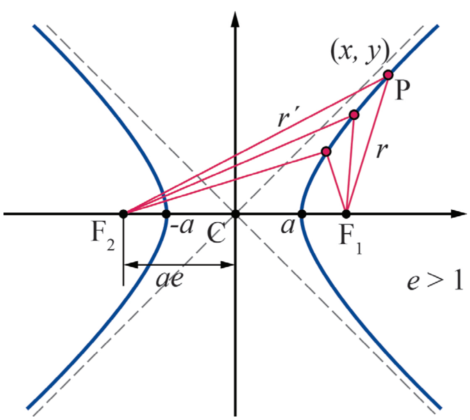

Figura 3.26: Hipérbole como lugar geométrico satisfazendo a **3.46**.

$$|r - r'| = 2a \tag{3.46}$$

ou seja,

$$r - r' = \pm 2a \tag{3.47}$$

Na expressão **3.47**, $2a$ é a distância entre os vértices da hipérbole. O sinal + ou − se aplica a cada um dos ramos da hipérbole, uma vez que a hipérbole é uma curva contendo dois ramos, cada um deles tendo um foco distinto (vide **Figura 3.26**).

Adotando-se um sistema cartesiano de forma que a origem coincida com o centro da hipérbole (vide **Figura 3.26**), temos que os focos são os pontos de coordenadas $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$ ou

$$F_1 = (\varepsilon a, 0) \qquad F_2 = (-\varepsilon a, 0) \tag{3.48}$$

onde ε é um parâmetro, maior do que 1, conhecido como excentricidade da hipérbole,

$$\varepsilon = c/a.$$

A partir da definição de hipérbole, a diferença das distâncias nos leva à identidade:

$$\sqrt{(x-\varepsilon a)^2 + (y)^2} - \sqrt{(x+\varepsilon a)^2 + (y)^2} = \pm 2a \tag{3.49}$$

Depois de algumas manipulações relativamente simples, a equação acima é equivalente à equação:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{y^2}{a^2(\varepsilon^2 - 1)} = 1 \tag{3.50}$$

Definimos agora o parâmetro positivo b por meio da relação:

$$b^2 = a^2\varepsilon^2 - a^2 \Rightarrow b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \tag{3.51}$$

e, assim, a equação da hipérbole pode ser escrita como:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \tag{3.52}$$

É importante notar que a equação acima foi deduzida para a situação considerada em que os focos da hipérbole se encontram no eixo das abscissas.

De maneira análoga, pode-se deduzir a equação para o caso em que os focos da hipérbole se encontram no eixo das ordenadas, obtendo:

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1 \tag{3.53}$$

As relações **3.52** e **3.53** não definem funções. No entanto, podemos encontrar a hipérbole como reunião de dois gráficos, em cada caso.

A partir de **3.52**, isolando a variável *y*, temos duas possibilidades. A primeira delas é:

$$y^{+} = b\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^{2} - 1} \qquad 3.54$$

cujo gráfico se encontra acima do eixo *x* (**Figura 3.27**).

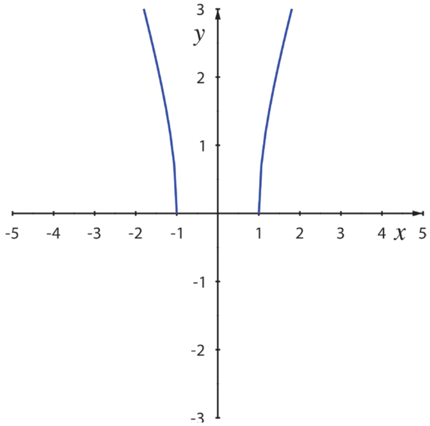

Figura 3.27: O gráfico de $y^{+} = b\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^{2} - 1}$.

A outra possibilidade é:

$$y^{-} = -b\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^{2} - 1} \qquad 3.55$$

cujo gráfico se encontra abaixo do eixo *x* (**Figura 3.28**).

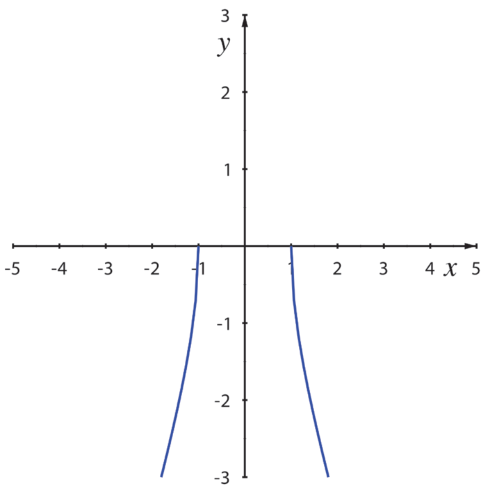

Figura 3.28: O gráfico de $y^{-} = -b\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^{2} - 1}$.

A partir de **3.53**, isolando a variável y, temos novamente duas possibilidades. A primeira delas é:

$$y^{+} = b\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^{2}} \qquad 3.56$$

cujo gráfico se encontra acima do eixo x.

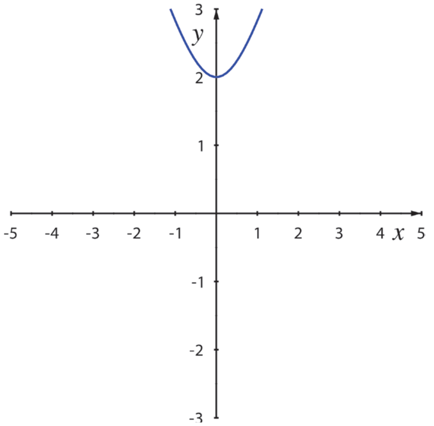

Figura 3.29: O gráfico de $y^{+} = b\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^{2}}$.

A outra possibilidade é:

$$y^{-} = -b\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^{2}} \qquad 3.57$$

cujo gráfico se encontra abaixo do eixo x.

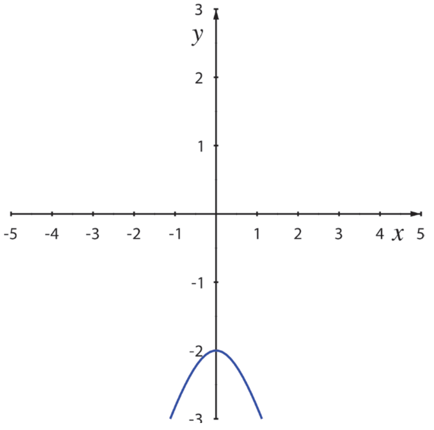

Figura 3.30: O gráfico de $y^{-} = -b\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^{2}}$.

A hipérbole é igualmente uma cônica, resultante da intersecção de um plano com uma superfície cônica (vide **Figura 3.31**).

Figura 3.31 : A hipérbole é uma cônica.