APLICAÇÕES NA DINÂMICA 5

Gil da Costa Marques

5.1 Introdução

As aplicações mais simples e interessantes das funções polinomiais dizem respeito ao estudo dos movimentos quando estes se dão de forma que a força sobre um determinado corpo seja constante, tanto ao longo de uma curva no plano quanto no espaço.

5.2 O Movimento uniforme

Num movimento ao longo de uma curva predeterminada, quando a soma das forças que agem sobre o corpo for não nula, mas de tal forma que a componente da força ao longo da direção tangencial à curva seja nula, classificamos esse movimento como uniforme.

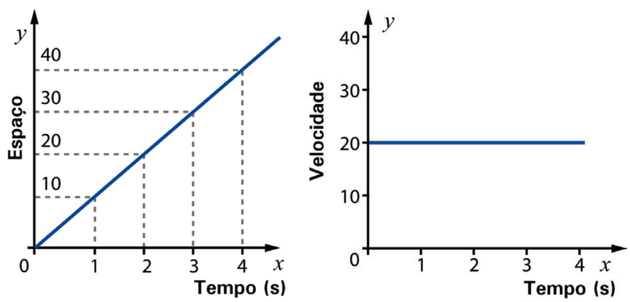

Figura 5.1: Gráficos do espaço e da velocidade escalar no movimento uniforme.

Galileu definiu o movimento uniforme tal qual o fazemos ainda hoje: é aquele para o qual a distância percorrida pelo móvel é proporcional ao tempo despendido para percorrê-la. Assim, num movimento uniforme, os espaços e a velocidade (constante) variam com o tempo de acordo com as expressões:

$$s(t) = v_0 t + s_0$$
$$v(t) = v_0 \qquad (5.1)$$

onde v_0 e s_0 são, respectivamente, velocidade e espaço inicial.

Nesse caso, o coeficiente do termo de primeiro grau, isto é, o coeficiente angular do polinômio do primeiro grau é a velocidade do movimento.

Exemplos

- Exemplo 1

Consideremos o caso em que dois automóveis estejam inicialmente a uma distância de 40 quilômetros um do outro na mesma estrada. Suponhamos que a velocidade de cada um, em valor absoluto, seja constante, 60 km/h e 100 km/h, respectivamente. Temos dois casos a considerar, conforme o sentido dos dois movimentos seja o mesmo ou não, a fim de determinar o tempo para que os dois veículos se encontrem.

No caso em que os automóveis se movimentam no mesmo sentido, especificado pelo mesmo sinal da velocidade, podemos escrever para cada um dos veículos:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= 60t + 40 + s_0 \\ s_2(t) &= 100t + s_0 \end{aligned} \qquad 5.2$$

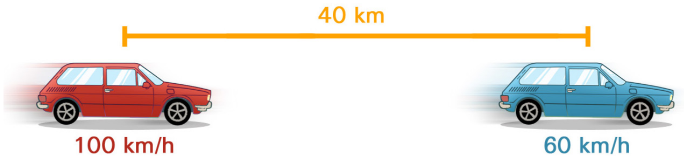

Figura 5.2: Condições iniciais do movimento de dois veículos em movimento uniforme.

Na situação considerada, as unidades de tempo e de espaço serão a hora e o quilômetro, respectivamente. Ademais, nas expressões acima, partimos do pressuposto de que o veículo mais lento está na frente do mais rápido e de que as distâncias são medidas a partir de um ponto de referência comum a ambos, no qual $t = 0$, e que dista s_0 do ponto onde se encontra o automóvel mais rápido. O ponto de encontro é caracterizado pelo tempo de encontro t_E, instante em que os espaços percorridos são iguais. Temos, portanto,

$$s_1(t_E) = s_2(t_E) \qquad 5.3$$

A igualdade acima ocorre quando as duas retas, que são os gráficos associados aos dois movimentos, se cruzam. O tempo de encontro é dado, portanto, por:

$$60t_E + 40 + s_0 = 100t_E + s_0 \Leftrightarrow t_E = 1 \qquad 5.4$$

ou seja, após 1 hora, os dois veículos se encontram.

O primeiro terá rodado 60 quilômetros durante esse intervalo de tempo enquanto o segundo terá rodado 100 quilômetros.

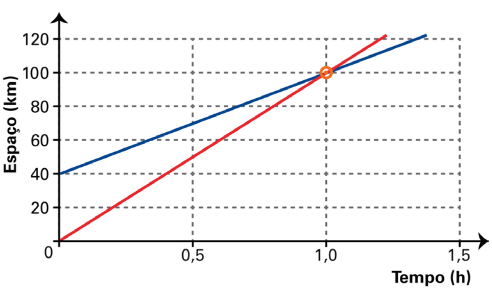

Figura 5.3: Gráficos do espaço × tempo e o instante do encontro entre os dois veículos.

No caso em que os dois automóveis se movimentam em sentidos opostos, as equações horárias são:

$$s_1(t) = -60t + 40 + s_0$$
$$s_2(t) = 100t + s_0 \qquad 5.5$$

E, portanto,

$$-60t_E + 40 + s_0 = 100t_E + s_0 \Leftrightarrow t_E = \frac{1}{4} \qquad 5.6$$

ou seja, após 1/4 hora, isto é, 15 minutos, os dois veículos se encontram.

5.3 O movimento uniformemente variado

Existem duas definições para o que denominamos movimentos uniformemente variados. Na primeira delas, dizemos que tais movimentos ocorrem quando a força (ou a soma das forças) é constante. A segunda definição diz que são movimentos ao longo de uma curva em que a componente da força na direção tangencial à curva é constante. Essa segunda definição se aplica apenas ao caso específico do movimento que se dá ao longo de uma curva predefinida. Como se vê, essas definições não são equivalentes.

De acordo com a definição de aceleração, podemos escrever, no segundo caso de movimento uniformemente variado:

$$\frac{F_0}{m} = a_0, \qquad 5.7$$

onde F_0 é a componente tangencial da força (admitida constante).

A velocidade escalar v da partícula depende do tempo de acordo com uma função afim ou polinomial do primeiro grau, cujos parâmetros são a aceleração (o coeficiente angular da reta) e a velocidade inicial (o valor da ordenada quando a reta cruza esse eixo). Explicitamente, escrevemos:

$$v = a_0 t + v_0 \qquad 5.8$$

A dependência do espaço em relação ao tempo é dada por uma função polinomial do segundo grau:

$$s(t)=\frac{a_0}{2}t^2+v_0t+s_0, \qquad 5.9$$

onde agora s_0 e v_0 representam, respectivamente, o espaço inicial e a velocidade escalar inicial.

Nesse tipo de movimento, podemos verificar que, se a aceleração for positiva (ou negativa), a concavidade da parábola – gráfico da função estabelecida em **5.9** – será positiva (ou negativa).

Em algum instante de tempo, aqui denominado t_0, o corpo cujo movimento estamos analisando estará na origem dos espaços. Esse tempo é dado por:

$$\frac{a_0}{2}t_0^{\;2}+v_0t_0+s_0=0. \qquad 5.10$$

Assim, nesse caso, as raízes estão associadas aos tempos que correspondem à passagem da partícula pela origem. Como sabemos, pode ocorrer o caso de haver dois instantes de tempo (quando a partícula vai e volta); nesse caso, $v_0^{\;2} > 2a_0s_0$, ou seja, o discriminante da equação do segundo grau é positivo. Pode acontecer também o caso de haver apenas um instante de tempo, o que ocorre quando $v_0^{\;2} = 2a_0s_0$, ou seja, o discriminante da equação do segundo grau é nulo. Esse é o caso de uma raiz apenas do polinômio de segundo grau. Finalmente, pode haver o caso em que nenhum instante de tempo satisfaça a condição **5.10**. Este último caso ocorre quando $v_0^{\;2} < 2a_0s_0$, isto é, o discriminante da equação do segundo grau é negativo e, nesse caso, o polinômio não terá raízes.

Os pontos de máximo ou mínimo têm um significado físico especial, uma vez que o instante t em que isso ocorre é aquele para o qual a velocidade se anula, isto é, para o instante em que o espaço é máximo ou mínimo, temos:

$$t_m=-\frac{v_0}{a_0} \qquad 5.11$$

o que implica que, nesse instante de tempo, a velocidade se anula:

$$v(t_m)=a_0t_m+v_0=0 \qquad 5.12$$

Isso significa que, no instante de tempo associado ao máximo ou mínimo, temos uma inversão do movimento, o qual se refletirá na inversão do sinal da velocidade. Assim, nesse instante, a partícula inverte o sentido do movimento.

• Exemplo 2

Os espaços ocupados por uma partícula que se movimenta ao longo do eixo Ox são dados pela função $x(t) = t^2 - 4t - 5$, onde a coordenada x é expressa em metros e o tempo t, $t \geq 0$, em segundos.

a. Em que instante(s) a partícula passa pela origem dos espaços?

b. Esboce o gráfico cartesiano que ilustre a variação do espaço percorrido em função do tempo.

c. Determine o instante em que ocorre a inversão do movimento da partícula.

→ Resolução:

a. A função $x(t) = t^2 - 4t - 5$ é uma função polinomial do segundo grau (cuja forma geral é $y = ax^2 + bx + c$). Na origem, o espaço é $x = 0$; logo, para saber os instantes em que a partícula passa pela origem, determinam-se as raízes de $x(t) = t^2 - 4t - 5 = 0$. Para tanto, podemos utilizar a fórmula de Baskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

No presente caso,

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-5) = 16 + 20 = 36 \text{ e } \sqrt{36} = 6.$$

Logo,

$$t = \frac{-(-4) \pm 6}{2(1)} = \frac{4 \pm 6}{2}.$$

Temos então duas raízes possíveis:

$$t_1 = \frac{4+6}{2} = 5 \text{ e } t_2 = \frac{4-6}{2} = -1,$$

que fornecem os instantes de tempo medidos em segundos.

A raiz $t_2 = -1$ deve ser descartada, pois $t \geq 0$ (o tempo será assumido sempre positivo).

Portanto, a partícula passa pela origem no instante $t = 5$ segundos.

b. O gráfico cartesiano da função polinomial de segundo grau é uma parábola. Para desenhá-la podemos, por exemplo, construir uma tabela de valores (os mais significativos), a partir de $x(t) = t^2 - 4t - 5$:

Tabela 5.1: Coordenadas para diversos valores do tempo.

t(s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x(m)	–5	–8	–9	–8	–5	0	+7	16	27

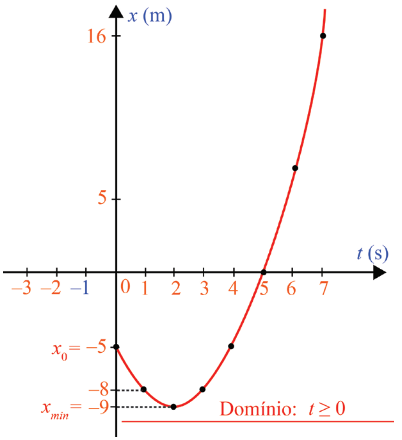

Figura 5.4: Gráfico da função $x(t) = t^2 - 4t - 5$, no qual é possível visualizar a posição da partícula em função do tempo.

Observe que, matematicamente, a parábola tem existência no semieixo negativo, isto é, para valores negativos da variável independente. Mas, no caso, como o domínio da função é constituído pelos valores do tempo t tais que $t \geq 0$, considera-se o trecho da parábola que se encontra no semieixo positivo, isto é, para valores positivos da variável independente.

O eixo de simetria é a reta paralela ao eixo das ordenadas, que passa por $t = 2$ e define o ponto de máximo ou de mínimo; dobrando-se a figura por essa reta, um ramo da parábola se sobrepõe ao outro.

c. O instante em que ocorre a inversão de movimento é o ponto de mínimo ou de máximo da função quadrática. No presente caso, isso ocorre no instante de tempo

$$t = 2 \text{ e } x(2) = x_{\text{min}} = -9.$$

No intervalo $0 \leq t \leq 2$, a partícula se afasta da origem cada vez mais lentamente; para $t > 2$, a partícula se aproxima e passa pela origem ($t = 5$), afastando-se, em seguida, cada vez mais rapidamente.

• Exemplo 3

Os espaços ocupados por dois pontos materiais A e B (os quais denominaremos corpos), que se movem ao longo de uma curva, têm coordenadas espaços que são expressas, em função do tempo, da seguinte maneira:

$$s_A = 20 + 5t \text{ e } s_B = 30t - 5t^2,$$

onde S é dado em metros (m) e o tempo t ($t \geq 0$) em segundos, sendo os espaços determinados a partir de uma origem comum.

a. Qual a posição (ou espaço s) ocupada pelos pontos materiais no instante $t = 0$?
b. Qual a distância entre eles? E qual se encontra à frente?
c. Em que instante os objetos estarão lado a lado?
d. Esboçar, num mesmo diagrama, os gráficos cartesianos que representam as funções que caracterizam os movimentos.

→ Resolução:

a. No instante $t = 0$, o corpo A ocupa a posição $s_A = 20 + 5\,(0) = 20$ e o corpo B, a posição $s_B = 30(0) - 5\,(0)^2 = 0$ (ele se encontra na origem dos espaços).

b. $\Delta s = s_B - s_A = 0 - (20) = -20$ ou, invertendo, $\Delta s = s_A - s_B = 20 - 0 = 20$ (o corpo A encontra-se 20 metros à frente de B).

c. Quando estiverem lado a lado, as suas posições serão iguais, ou seja, $s_A = s_B$. Então, igualando-se as duas equações, temos:

$$20 + 5t = 30t - 5t^2$$

donde:

$$t^2 - 5t + 4 = 0,$$

cujas raízes são: $t_1 = 1$ s e $t_2 = 4$ (ambas pertencentes ao domínio constituído pelos valores de t tais que $t \geq 0$). Isso significa que os corpos estarão lado a lado nesses dois instantes. Em quais posições? Para saber, basta substituir esses valores, em $s = 20 + 5t$ e em $s_B = 30t - 5t^2$, obtendo, respectivamente, $s_A = 25$ e $s_B = 40$, que representam as posições dos corpos para os espaços expressos em metros.

d. A **Figura 5.5** mostra os pontos onde os corpos estão lado a lado.

Vale observar que, para valores de t tais que $0 \leq t < 1$, o corpo A encontra-se à frente de B. Para $1 < t < 4$, o corpo B está à frente de A; para a posição do corpo B, cuja equação é polinomial de segundo grau, o ponto de máximo ocorre em $t = 3 \rightarrow s_B = 45$; nesse ponto, ocorre uma inversão de movimento: o corpo B começa a retroceder (volta para a origem) e é ultrapassado pelo corpo A no instante $t = 4$ (como sempre, em todo o exercício, t é dado em segundos (s) e s é dado em metros (m)).

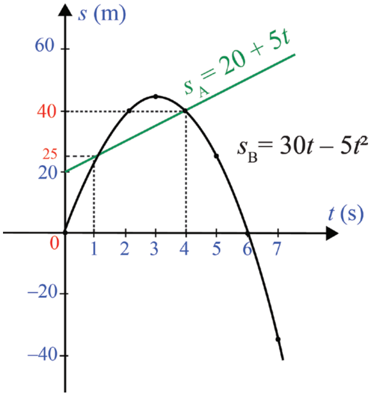

Figura 5.5: Os pontos onde os gráficos se cruzam indicam as coordenadas espaços onde os corpos A e B estão lado a lado.

5.4 O problema geral

Ao tratar do movimento de projéteis, consideraremos a superfície da Terra como se fosse plana. Para os fenômenos corriqueiros aqui estudados, essa aproximação é muito boa.

Consideraremos um sistema cartesiano de tal forma que o eixo x seja paralelo ao solo e o eixo y seja ortogonal a ele.

A situação física que gostaríamos de estudar neste momento é a seguinte: um projétil (uma bola de beisebol, por exemplo) é lançado de um ponto num certo instante de tempo. Seja o instante de tempo dado por $t = t_0$, e sejam (x_0, y_0) as coordenadas cartesianas do ponto de lançamento do projétil.

Admitamos que ele seja lançado com uma velocidade inicial tal que suas componentes sejam dadas por:

$$v_{0x} \text{ e } v_{0y} \tag{5.13}$$

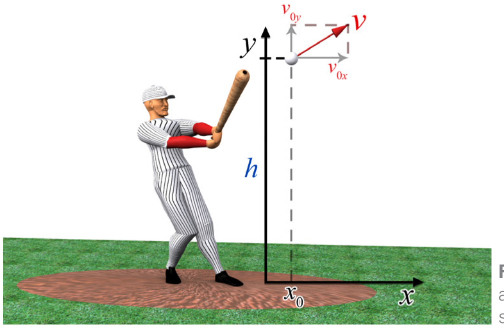

Figura 5.6: Para pequenas altitudes a força da gravidade se mantém constante.

Suponhamos ainda que ele seja lançado a partir de uma altura h. Essa é a altura do lançamento. Assim, o ponto de lançamento do projétil tem coordenadas cartesianas dadas por:

$$(x_0, y_0) = (x_0, h). \tag{5.14}$$

Muitas vezes especificamos as condições iniciais do movimento a partir do módulo da velocidade inicial v_0 e do ângulo θ_0, definido como o ângulo formado pelo vetor velocidade com a horizontal (eixo x). Esse ângulo é conhecido como ângulo de tiro.

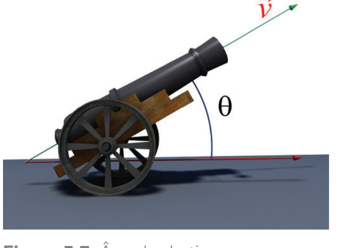

Figura 5.7: Ângulo de tiro.

Assim, outra forma de especificar as condições iniciais, em relação à velocidade inicial, é por meio das grandezas (v_0, θ_0). As componentes do vetor velocidade inicial são relacionadas a estas últimas por meio das relações:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \tag{5.15}$$

$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0. \tag{5.16}$$

Veremos a seguir que é possível, a partir dos dados já fornecidos, isto é, das condições iniciais, prever a posição da partícula, bem como a sua velocidade para qualquer instante de tempo.

No mais das vezes, após o lançamento, ocorrem dois acontecimentos importantes. O primeiro deles (que ocorre sempre) é a queda do objeto. Seja t_q o instante de tempo em que ocorre a queda do projétil; o tempo de voo é definido como o tempo no qual ele esteve viajando. Ele é dado pela diferença entre os instantes de tempo da queda (t_q) e do lançamento (t_0):

$$t_v = t_q - t_0. \tag{5.17}$$

Durante o tempo do percurso ou tempo de voo, o projétil percorre uma distância horizontal conhecida como alcance.

O segundo acontecimento importante, e que vale a pena destacar, é o fato de que, após decorrido um certo tempo desde o lançamento, o projétil atinge uma altura máxima, a partir da qual tem início o seu movimento de queda.

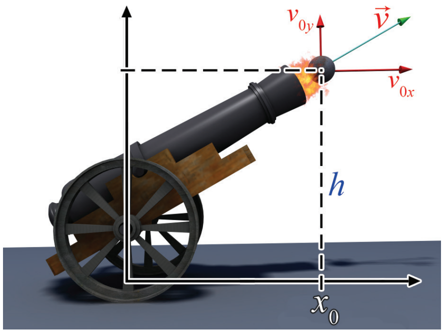

Figura 5.8: Condições iniciais.

Admite-se que a aceleração da gravidade (g) seja constante. Como apontado antes, isso vale para alturas máximas atingidas não muito grandes.

Assim, a partir da posição e da velocidade da partícula em cada ponto, estaremos interessados, em particular, na determinação dos seguintes parâmetros:

- a altura máxima atingida;
- o tempo de queda (o tempo de duração do voo livre);
- o alcance do projétil na posição horizontal;

Para atingir esses objetivos, precisamos primeiramente determinar as equações básicas do movimento.

5.5 Equações básicas do movimento

A aplicação realista mais simples que podemos fazer das leis de Newton diz respeito ao movimento das partículas sob a ação da gravidade. A análise desse movimento fica consideravelmente simplificada quando notamos que a força da gravidade não muda muito ao considerar movimentos próximos da superfície terrestre (alguns quilômetros acima da superfície). São movimentos que ocorrem no cotidiano como, por exemplo, a queda de uma maçã.

Adotamos um sistema cartesiano em que o eixo das abscissas (o eixo x) é considerado como paralelo à superfície terrestre e o eixo y na direção perpendicular à superfície. Consideramos a Terra como se fosse plana e, como a gravidade aponta sempre para o interior da Terra, desprezando a força de resistência do ar, e tendo em vista a escolha do referencial acima, a força gravitacional tem apenas uma componente:

$$F_y = -(mg) \tag{5.18}$$

Como a aceleração da gravidade aponta na direção perpendicular à superfície terrestre, o sistema de coordenadas cartesianas mais indicado é aquele em que um dos eixos é paralelo ao solo (o eixo x) e o outro eixo (eixo y) é paralelo à aceleração da gravidade.

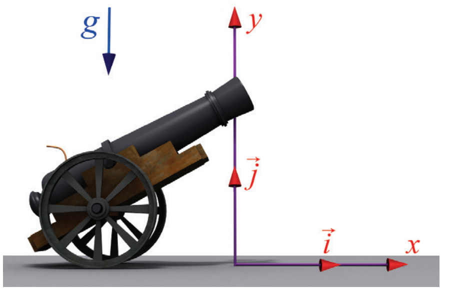

Figura 5.9: Escolha do referencial e das coordenadas.

Podemos estudar o movimento do projétil com a composição de dois movimentos. Essa ideia foi proposta primeiramente por Galileu: um movimento na direção vertical (eixo y) e outro movimento na direção horizontal (eixo x).

Ao longo do eixo x, como não existe aceleração nessa direção, o movimento é uniforme e escrevemos:

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0), \tag{5.19}$$

onde x_0 é a coordenada inicial (no tempo $t = t_0$) e v_{0x} é a componente da velocidade inicial ao longo do eixo x.

A componente da velocidade no eixo x é constante e dada por:

$$v_x = v_{0x}, \tag{5.20}$$

ao passo que, ao longo do eixo y, a aceleração é constante e dada pela aceleração da gravidade g.

O movimento no eixo y é, portanto, uniformemente variado e, para a orientação de eixos considerada, escrevemos para a componente da velocidade na direção vertical a seguinte expressão:

$$v_y = v_{0y} - g\left(t - t_0\right), \tag{5.21}$$

onde v_{0y} é a componente vertical da velocidade inicial.

Para determinar a posição em qualquer instante de tempo, basta conhecer cada uma das variáveis x e y em qualquer instante de tempo. Essas coordenadas por sua vez são dadas, para um instante de tempo qualquer, a partir do lançamento, pelas expressões:

$$x = x_0 + v_{0x}\left(t - t_0\right) \tag{5.22}$$

$$y = h + v_{0y}\left(t - t_0\right) - \frac{g}{2}\left(t - t_0\right)^2, \tag{5.23}$$

onde h e x_0 determinam a posição da partícula no momento do lançamento do projétil.

Para as componentes da velocidade, em qualquer t, valem as seguintes expressões:

$$v_x = v_{0x} \tag{5.24}$$

$$v_y = v_{0y} - g\left(t - t_0\right). \tag{5.25}$$

Essas são as equações básicas do movimento. Podemos, a partir delas, obter todas as informações sobre esse movimento. A conclusão à qual chegamos é a de que, dadas a posição inicial (x_0, h) e a velocidade inicial, determinadas a partir das componentes (v_{0x}, v_{0y}), podemos determinar a posição e velocidade do projétil em qualquer instante (t) depois do lançamento.

5.6 Trajetória do projétil

Determinemos agora a trajetória da partícula. Para isso, escrevemos o tempo como se fosse dependente da coordenada x (na verdade, como sabemos, é o inverso). Obtemos:

$$t - t_0 = \frac{x - x_0}{v_{0x}}. \tag{5.26}$$

Substituindo a expressão acima em **5.23**, encontramos a equação para a trajetória:

$$y = h + v_{0y}\left(\frac{x - x_0}{v_{0x}}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{x - x_0}{v_{0x}}\right)^2 \tag{5.27}$$

Pode-se facilmente verificar que essa equação descreve uma trajetória e que a curva a ela associada é uma parábola.

5.7 Altura máxima (h_{max})

Admitiremos que os tempos serão contados a partir do instante do lançamento, ou seja, faremos para simplificar:

$$t_0 = 0. \tag{5.28}$$

Como é bem sabido, desde que sua velocidade inicial não seja muito alta, isto é, desde que ela não atinja a velocidade de escape (termo para a velocidade acima da qual um objeto lançado não retorna mais à Terra), todo projétil retorna à Terra depois de algum tempo. Assim, ele sobe, sobe, até atingir uma altura máxima. Nesse ponto ele retorna. No ponto de retorno teremos a inversão do sinal da componente vertical da velocidade, ou seja, nesse ponto sua velocidade na direção vertical é nula. Assim, o ponto no qual ele "para no ar", olhando apenas seu movimento na vertical, pode ser determinado a partir da condição de velocidade nula no instante de tempo t_{m}:

$$v_y(t_m) = 0 \tag{5.29}$$

Essa equação, por outro lado, também nos permite determinar o instante de tempo, (t_m), em que o objeto atinge a altura máxima. Utilizando a expressão **5.21** esse instante é dado por:

$$t_m = \frac{v_{0y}}{g}. \tag{5.30}$$

As coordenadas do projétil nesse instante de tempo, fazendo uso agora das expressões **5.22** e **5.23**, são dadas pelas expressões:

$$x(t_m) = x_{h_{\max}} = x_0 + v_{0x}\frac{v_{0y}}{g} = x_0 + \frac{v_{0x}v_{0y}}{g} \tag{5.31}$$

$$y(t_m) = h_{\max} = h + v_{0y}\frac{v_{0y}}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 = h + \frac{(v_{0y})^2}{2g}. \tag{5.32}$$

Estas expressões podem ser escritas ainda, em termos das condições iniciais (módulo da velocidade e ângulo de tiro), como:

$$x_{h_{\max}} = x_0 + \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen}\theta\cos\theta \tag{5.33}$$

$$h_{\max} = h + \frac{v_0^2}{2g}\operatorname{sen}^2\theta. \tag{5.34}$$

A altura máxima é dada, portanto, como um acréscimo da altura de lançamento, cujo valor depende do módulo da velocidade inicial e da sua direção. Para atingir a altura máxima, mantida a mesma velocidade em módulo, devemos atirar o objeto para cima (ângulo de tiro igual a $\theta = \pi/2$). No entanto, nesse caso, o alcance na horizontal será nulo.

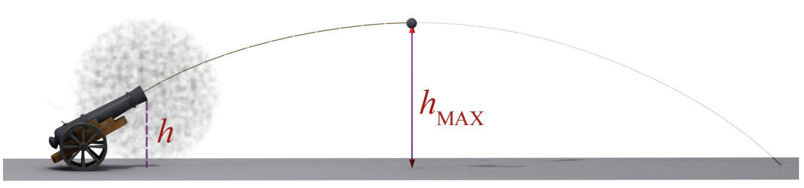

Figura 5.10: A altura máxima em comparação com a altura de lançamento.

5.8 Tempo de queda ou de voo

Todo projétil cai depois de decorrido um intervalo de tempo denominado tempo de voo, expresso em **5.17**. É o tempo de duração da viagem do projétil. Com a escolha de referencial aqui efetuada, o tempo de voo é determinado a partir da condição

$$y(t_V) = 0, \tag{5.35}$$

ou seja, nesse momento, a coordenada do projétil na vertical é nula, indicando que ele terá atingido o solo nesse instante. A condição acima leva-nos a uma equação do segundo grau para a determinação do tempo de voo. Essa equação é, a partir de **5.35** e **5.23**:

$$h + v_{0y} t_V - \frac{g}{2} t_V{}^2 = 0. \tag{5.36}$$

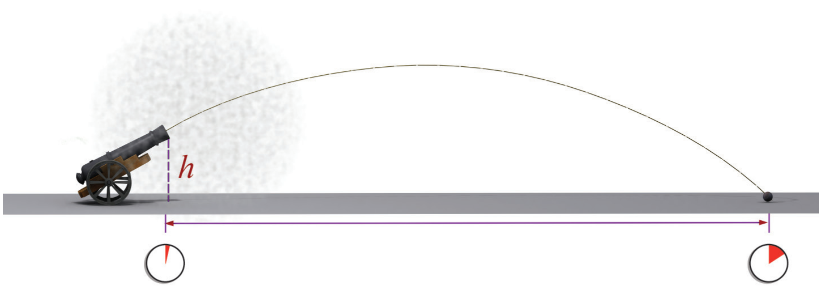

Figura 5.11: Tempo decorrido até o projétil atingir o solo.

A única solução aceitável para a equação acima, uma vez que esse tempo deve ser necessariamente positivo, é, usando **5.16**:

$$t_V = \frac{1}{g}\left(v_{0y} + \sqrt{\left(v_{0y}\right)^2 + 2gh}\right) = \frac{1}{g}\left(v_0 \operatorname{sen}\theta + \sqrt{\left(v_0 \operatorname{sen}\theta\right)^2 + 2gh}\right) \tag{5.37}$$

5.9 Alcance do Projétil

Quando o projétil atinge o solo, suas coordenadas são dadas por:

$$\begin{aligned} x(t_V) &= x_0 + v_{0x} t_V \\ y(t_V) &= 0. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Assim, o valor da coordenada x no instante em que ele atinge o solo, levando-se em conta a expressão para o tempo de voo em **5.37** e a expressão em **5.15**, é:

$$x(t_V) = x_0 + \frac{v_{0x}}{g}\left(v_{0y} + \sqrt{\left(v_{0y}\right)^2 + 2gh}\right) = x_0 + \frac{v_0 \cos\theta}{g}\left(v_0 \operatorname{sen}\theta + \sqrt{\left(v_0 \operatorname{sen}\theta\right)^2 + 2gh}\right). \tag{5.39}$$

Denomina-se alcance do projétil, a, a diferença de abscissas associadas ao ponto de saída do projétil e seu ponto de chegada ao solo, isto é:

$$a = x(t_V) - x_0. \tag{5.40}$$

Figura 5.12: O alcance é a distância máxima atingida na direção horizontal.

Levando-se em conta a expressão **5.40**, vemos que o alcance depende da altura da qual lançamos o projétil, do módulo da velocidade inicial e do ângulo de tiro. Explicitamente, temos:

$$a = \frac{v_{0x}}{g}\left(v_{0y} + \sqrt{\left(v_{0y}\right)^2 + 2gh}\right) = \frac{v_0 \cos\theta}{g}\left(v_0 \operatorname{sen}\theta + \sqrt{\left(v_0 \operatorname{sen}\theta\right)^2 + 2gh}\right). \tag{5.41}$$

Ao atingir o solo, o projétil tem velocidade tal que suas componentes são dadas por:

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\theta \\ v_y(t_v) &= v_0 \operatorname{sen}\theta - g t_v = -\sqrt{\left(v_0 \operatorname{sen}\theta\right)^2 + 2gh}. \end{aligned} \tag{5.42}$$

• EXEMPLO 4

Um projétil é lançado a partir do solo com velocidade v_0 = 600 m/s e com ângulo de tiro θ = 53°. Dados: cos53° = 0,6 e sen53° = 0,8. Desprezando-se a resistência do ar, o projétil descreve uma trajetória parabólica, conforme ilustra a **Figura 5.13**.

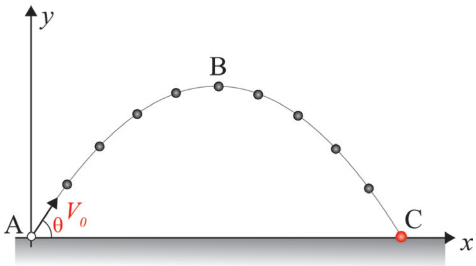

Figura 5.13: Projétil lançado do ponto A com velocidade V_0, com ângulo de tiro θ com a horizontal. A distância AC é o alcance do projétil.

a. Qual a altura máxima alcançada pelo projétil (ou seja, quando atinge a posição B)?
b. Qual o tempo de voo?
c. Qual o alcance AC do projétil?
d. Escreva a equação da trajetória.

→ RESOLUÇÃO:

Para responder às questões levantadas, devemos analisar as quatro equações (duas na direção do eixo 0x e duas na direção do eixo 0y) que descrevem o movimento de um projétil.

Primeiramente, vamos nos concentrar na velocidade de lançamento V_0 com ângulo de tiro θ.

Essa velocidade deve ser decomposta em duas componentes: $v_{0x} = v_0\cos\theta$ e $v_{0y} = v_0\text{sen}\theta$. Como θ = 53° e v_0 = 600 m/s, tem-se: v_{0x} = 360 m/s e v_{0y} = 480 m/s. Além disso, no instante t = 0 o projétil se encontra na origem, ou seja, $x_0 = y_0 = 0$. Assim, as equações horárias do movimento são:

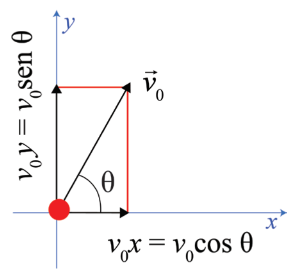

Figura 5.14: Esquema ampliado evidenciando as componentes da velocidade nas direções horizontal e vertical.

Tabela 5.2: Equações horárias do movimento, analisando os eixos horizontal e vertical.

Direção horizontal ou eixo 0x	Direção vertical ou eixo 0y
$v_x = v_{0x}$ = 360 m/s constante $x = x_0 + v_{0x}t = 360t$	$a_y = g = 10\text{ m/s}^2$ $v_y = v_{0y} - gt = 480 - 10.t$ $y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 + 480t - 5t^2$

Agora podemos responder aos quesitos:

a. Para calcular a altura máxima necessitamos conhecer o instante t em que o projétil atinge essa altura. Esse instante pode ser calculado escrevendo $v_y = 480 - 10\cdot t = 0$, de onde se obtém t = 48 s. Substituindo-se esse valor na equação do espaço $y = 480t - 5t^2 = 480(48) - 5(48)^2$ = 11.520 m.

b. Uma vez que no instante t = 0 o projétil se encontrava na origem, quando ele retornou ao solo, tem-se y = 0. Assim, $y = 480t - 5t^2 = 0$, ou seja, $t(480 - 5t) = 0$, de onde se encontram duas soluções: $t' = 0$ e $t'' = 480/5 = 96$ s. O instante t' = 0 é o instante inicial em que o projétil se encontrava na origem (no solo) e t'' = 96 s é o instante de tempo em que, após voar pelo espaço, o projétil retorna ao solo. Portanto, o tempo de voo é de 96 s.

c. O alcance do projétil é a distância entre os pontos A(0; 0) e C(x_C; 0), ou seja, o alcance é igual ao valor de x_C. Como determinar x_C? Basta substituir $t = 96$ s (instante em que o projétil atinge o solo, depois de voar durante 96 s) na equação $x = 360t$. Obtemos $x = 360(96) = 34.560$ m.

d. Para se obter a equação da trajetória: $y = f(x)$, basta eliminar a variável tempo entre as equações $x = 360 \cdot t$ e $y = 480t - 5t^2$. Assim, de $x = 360 \cdot t$ segue-se que $t = x/360$ que, substituído em $y = 480t - 5t^2$, resulta $y = (4x)/3 - (x^2)/25920$, que é a equação de uma parábola.

• EXEMPLO 5

Uma bola de tênis é lançada com velocidade horizontal $v_{0x} = 10$ m/s de uma altura $h = 45$ m do solo, conforme ilustra a **Figura 5.15**. Após o lançamento, a bola fica animada de um movimento que pode ser analisado em duas direções: vertical e horizontal. Trata-se de um movimento balístico.

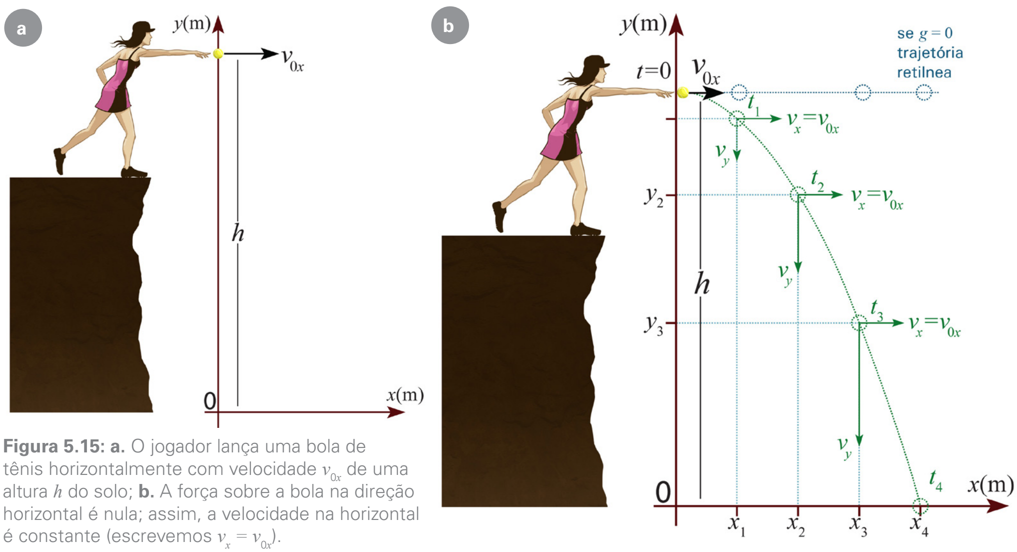

Figura 5.15: a. O jogador lança uma bola de tênis horizontalmente com velocidade v_{0x} de uma altura h do solo; **b.** A força sobre a bola na direção horizontal é nula; assim, a velocidade na horizontal é constante (escrevemos $v_x = v_{0x}$).

A **Figura 5.15a** indica que, se a gravidade da Terra fosse nula, a trajetória da bola seria retilínea e horizontal. Mas devido à gravidade, ao mesmo tempo em que a bola avança horizontalmente, ela cai verticalmente. Pelo princípio da interdependência dos movimentos, o movimento na horizontal se processa de maneira simultânea e independente em relação ao movimento na vertical. Assim, as equações desse movimento balístico são:

- Na **horizontal**, o movimento é uniforme e as equações que o representam são:
  - $v_x(t) = v_{0x}$
  - $x(t) = x_0 + v_{0x}t.$
- Na **vertical**, o movimento é acelerado e as equações são:
  - $v_y(t) = v_{0y} - gt$ e $y(t) = y_0 - \dfrac{1}{2}gt^2$

a. Escrever as 4 equações para o movimento balístico da bola de tênis.
b. Determinar quanto tempo depois a bola atinge o solo.
c. Determinar as coordenadas do ponto de impacto da bola contra o solo.
d. Encontrar as velocidades v_x e v_y da bola quando ela colide com o solo.
e. Determinar a equação da trajetória da bola.

→ Resolução:

a. As condições iniciais, no sistema SI, são: $x_0 = 0$ e $v_{0x} = 10$; $y_0 = 45$, $v_{0y} = 0$ (como o lançamento é horizontal, no instante $t = 0$, a bola não tem velocidade vertical) e $g = 10$. Assim:

- $v_x(t) = 10$ e $x(t) = 10t$.
- $v_y(t) = -10t$ e $y(t) = 45 - 5t^2$.

b. Para saber quanto tempo depois de solta a bola chega ao solo, devemos fazer uso da equação $y(t) = 45 - 5t^2$. Quando a bola atinge o solo, $y = 0$, ou seja, $45 - 5t^2 = 0$, de onde $t = +3$ ($t = -3$ deve ser descartado). Portanto, a bola atinge o solo 3 segundos após o lançamento.

c. Sabendo-se que, quando $t = 3$, a bola atinge o solo e as coordenadas x e y são assim determinadas: $x = 10.t = 30$ e $y = 45 - 5t^2 = 45 - 5(3)^2 = 0$. Assim, as coordenadas do ponto de impacto são (30; 0).

d. As velocidades podem ser determinadas pelas respectivas equações, bastando substituir $t = 3$. Assim: $v_x(t) = 10$ (vale observar que v_x não depende do tempo, pois, na horizontal, o movimento é uniforme) e $v_y(t) = -10t = -10(3) = -30$.

e. A equação da trajetória relaciona a variável y com a variável x. Para isso, elimina-se t das equações $y(t) = 45 - 5t^2$ e $x(t) = 10t$. Assim: $t = x/10$ e, após substituição,

$$y(x) = 45 - 5(x/10)^2 = 45 - x^2/20.$$

5.10 Casos particulares

As expressões obtidas até aqui para as grandezas relevantes (tempo de voo, alcance, altura máxima) são muito gerais. Com o intuito de estudar casos simples e de interesse, analisaremos três situações distintas: lançamento na vertical, lançamento horizontal e lançamento a partir do solo.

5.10.1 Lançamento na vertical

No caso do lançamento na vertical, a componente da velocidade na direção horizontal é nula, ou seja, por definição:

$$v_x(t_0) = v_{0x} = v_0 \cos\theta = 0, \tag{5.43}$$

uma vez que $\theta = \pi/2$.

Nessas circunstâncias, o movimento se dá apenas ao longo do eixo y, e suas equações básicas são aquelas dadas pelas expressões **5.22 – 5.25**. Nesse caso, considerando apenas a velocidade inicial, temos três situações possíveis:

5.10.1.1 Lançamento para cima ($v_{0y} = v_0$)

Nesse caso, o corpo atingirá a altura máxima dada agora por:

$$H = h + \frac{v_0^{\,2}}{2g}, \tag{5.44}$$

o que ocorrerá depois de um intervalo de tempo dado por:

$$t_m = \frac{v_0}{g}. \tag{5.45}$$

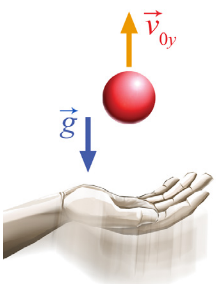

Figura 5.16: Lançamento na vertical para cima.

e atingirá o solo depois de um tempo (o tempo de voo) dado por:

$$t_V = t_\mathrm{m}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^{\,2}}}\right). \tag{5.46}$$

- Exemplo 6

Uma bola é lançada verticalmente para cima com velocidade inicial $v_{0y} = 6$ m/s de um ponto situado a uma altura $y_0 = 20$ metros do solo, conforme ilustra a **Figura 5.17**.

Considerando $g = 10$ m/s², a equação do espaço é $y(t) = 20 + 6t - 5t^2$ e a da velocidade é $v_y(t) = 6 - 10.t$. Adotamos as unidades do SI (m; s).

Calcular:

a. A altura máxima atingida pela bola.

b. A velocidade com que a bola atinge o solo.

c. O tempo de voo da bola.

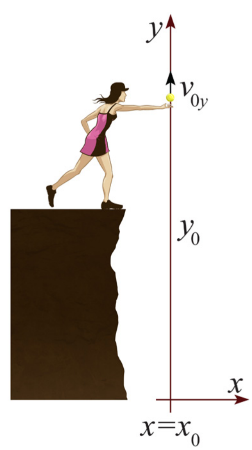

Fig. 5.17 O operador lança uma bola verticalmente para cima.

→ Resolução:

a. Enquanto a bola estiver animada de velocidade de ascensão ($v_y \neq 0$) ela continua subindo. Até quando? Até que sua velocidade, momentaneamente, seja nula ($v_y = 0$). Nesse instante, a altura alcançada pela bola é máxima. Então, devemos calcular o tempo t para o qual $v_y = 0$ e substituir em $y = y(t)$ para calcular $y = y_{max}$. Logo, de $v_y = 0$ segue-se que $v_y(t) = 6 - 10.t = 0$, ou seja, $t = 0,6$ s. Substituindo em $y(t) = 20 + 6t - 5t^2 = 20 + 6(0,6) - 5(0,6)^2 = 21,8$ m. Portanto, $y_{max} = 21,8$ m.

b. Para determinar a velocidade com que a bola atinge o solo devemos conhecer o instante t em que a bola atinge o solo. Como proceder?

1.º quando a bola atinge o solo $y = 0$; portanto, da condição $y(t) = 20 + 6t - 5t^2 = 0$ obtemos o instante t procurado.

2.º uma vez conhecido o tempo t em que a bola atinge o solo, obteremos a velocidade procurada fazendo uso da expressão $v_y(t) = 6 - 10.t$. Então, vejamos: se $y(t) = 20 + 6t - 5t^2 = 0$, obtemos as raízes $t' \cong 2,7$ s e $t'' \cong -1,49$ s. O tempo negativo deve ser ignorado, pois o domínio das funções é constituído pelos valores de t tais que $t \geq 0$. Assim, a bola atinge o solo no instante $t \cong 2,7$ s. E a velocidade será $v_y(t) = 6 - 10.t = 6 - 10(2,7) = -21$ m/s. O sinal negativo deve ser interpretado: como o referencial $0y$ foi orientado positivamente para cima, a velocidade que é vertical para baixo (quando atinge o solo) assume valor algébrico negativo. Podemos dizer que a bola atinge o solo com velocidade de módulo $|v_y| \cong 21$ m/s e sentido em direção ao centro da Terra.

c. O tempo t é medido desde o instante em que a bola foi lançada. Nesse caso, o tempo de voo é o intervalo de tempo que a bola fica no ar, ou seja, desde 0 (lançamento) até atingir o solo (t). Esse tempo foi calculado no item **b**, ou seja, $t \cong 2,7$ s $= t_{voo}$.

5.10.1.2 Lançamento para baixo ($v_{0y} = -v_0$)

Nesse caso, utilizando **5.37**, concluímos que o projétil segue na descendente até atingir o solo depois de um tempo de voo dado por:

$$t_V = \frac{v_0}{g}\left(\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^{\,2}}}-1\right). \tag{5.47}$$

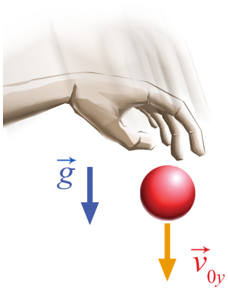

Figura 5.18: Lançamento para baixo.

5.10.1.3 Queda livre ($v_{0y} = 0$)

Nesse caso, o tempo de queda (que é o tempo de voo) é dado, de acordo com **5.37**, por:

$$t_q = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad 5.48$$

o qual não depende da massa. Todos os corpos demoram o mesmo tempo para cair.

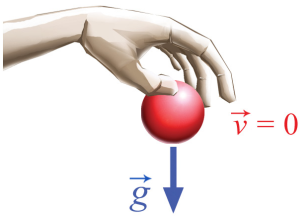

Figura 5.19: Queda livre.

Utilizando esse valor do tempo na expressão da velocidade na direção vertical (equação **5.25**), vemos que o corpo atinge o solo com velocidade:

$$v_y = -\sqrt{2gh}. \quad 5.49$$

Como já descobrira Galileu, essa velocidade não depende da massa.

- Exemplo 7

Uma manga madura desprende-se de um galho localizado numa altura igual a 16,2 metros. Esse fenômeno é entendido como movimento de queda na vertical, cujas equações genéricas são: $v_y(t) = v_{0y} - gt$ e $y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$, onde as variáveis com símbolos "0" são aquelas relacionadas às condições iniciais, ou seja, no instante t = 0 (no caso, quando a manga se desprende do galho).

a. Escreva as equações do espaço $y(t)$ e da velocidade $v_y(t)$ do movimento de queda vertical da manga.

b. Determine o tempo de queda e a velocidade com que a manga atinge o solo.

→ Resolução:

a. Vamos considerar $g = 10$ m/s². Quando a manga se desprende ($t = 0$), a velocidade é $v_{0y} = 0$ e a altura é $y_0 = 16,2$ m. Logo, as equações tornam-se: $y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 16,2 - 5t^2$ e $v_y(t) = v_{0y} - gt = -10t$.

b. Fazendo $y(t) = 0$ determina-se o instante em que a manga atinge o solo. Esse tempo é o tempo de queda. Logo, $y(t) = 16,2 - 5t^2 = 0 \rightarrow t = \pm 1,8$ s. Descarta-se o tempo negativo, e o resultado $t = 1,8$ s, que é o tempo de queda da manga. A velocidade com que a manga atinge o solo é obtida substituindo-se $t = 1,8$ s na equação da velocidade. Assim, $V_y(t) = -10t = -10(1,8) = -18$ m/s.
O sinal negativo indica que a velocidade é vertical para baixo (uma vez que o eixo dos espaços 0y foi adotado como positivo para cima).

5.10.2 Lançamento na horizontal

O lançamento na horizontal é caracterizado pelo fato de ele se processar com um ângulo de tiro igual a zero, ou seja,

$$v_y(t_0) = v_{0y} = v_0 \text{sen}\theta = 0, \qquad 5.50$$

pois θ = 0.

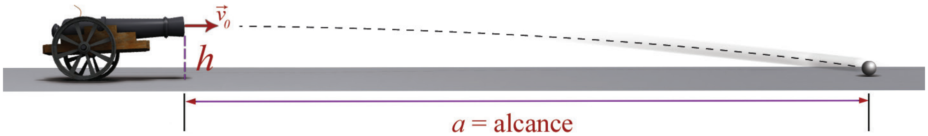

Figura 5.20: Lançamento na horizontal.

O tempo de voo é igual ao tempo de queda livre de uma altura h, isto é,

$$t_q = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

e o alcance será dado por:

$$a = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}. \qquad 5.51$$

5.10.3 Lançamento a partir do solo

Nesse caso, basta fazer $h = 0$, nas expressões gerais, para o tempo de voo, altura máxima e alcance.

O ponto a ser ressaltado é ser o tempo de voo duas vezes maior do que aquele requerido para atingir a altura máxima, ou seja, o tempo despendido para subir (atingir a altura máxima) é igual ao tempo necessário para descer. Temos assim:

$$t_v = 2t_{\text{m}} = \frac{2v_0 \,\text{sen}\,\theta}{g}. \qquad 5.52$$

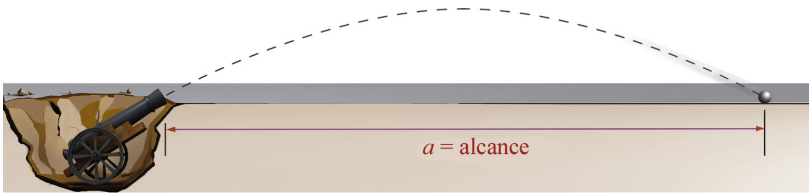

Figura 5.21: Lançamento a partir do solo.

Em muitos casos, é importante determinar para que valor do ângulo de tiro obtemos a máxima eficiência em termos de alcance. Uma alternativa para aumentar o alcance é aumentar o valor do módulo da velocidade inicial. Essa solução esbarra no fato de que temos limites, ou físicos ou do artefato utilizado para efetuar o lançamento, para obtermos incrementos no valor dessa grandeza. A alternativa, para um valor fixo da velocidade, é escolher melhor o parâmetro ângulo de tiro. Lembrando que, nessas circunstâncias, o alcance depende do ângulo de tiro de acordo com a expressão:

$$a(\theta) = \frac{v_0^{\ 2}}{g} 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{v_0^{\ 2}}{g}\operatorname{sen}2\theta, \tag{5.53}$$

podemos verificar, por meio do gráfico da função acima, que o valor máximo do alcance ocorrerá quando o ângulo de tiro for igual a 45 graus.

- Exemplo 8

Um atirador mira sua arma para uma fruta pendurada a uma altura H = 32 metros acima da altura da sua arma. O projétil é ejetado com velocidade V_0 = 40 m/s, com ângulo de tiro (veja **Figura 5.22**).

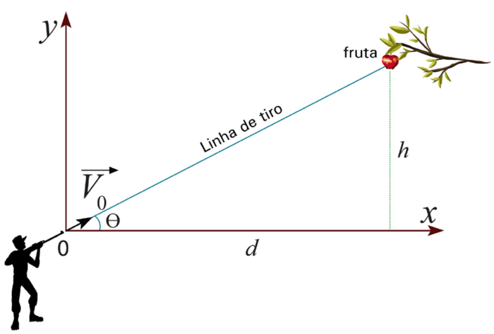

Figura 5.22: Atirador mirando uma fruta presa no galho. No momento em que ele aciona o gatilho, a fruta se desprende do galho. O projétil atingirá a fruta?

No instante em que a arma é disparada, a fruta se solta da árvore.
Determinar a posição do ponto de impacto fruta/projétil.
Dados: $D = 24$ metros; $\text{sen}\theta = 0{,}80$ e $\cos\theta = 0{,}60$.
Desprezar a resistência do ar.

→ RESOLUÇÃO:

Como a fruta se solta no instante em que o projétil é disparado, os dois movimentos são simultâneos. Para escrever as equações horárias, precisamos identificar as condições iniciais $(t_0 = 0)$.
As coordenadas iniciais do projétil são $x = 0$ e $y = 0$ e as componentes de sua velocidade inicial são: $v_{0x} = v_0\cos\theta = 40 \times 0{,}60 = 24$ m/s; $v_{0y} = v_0\text{sen}\theta = 40 \times 0{,}80 = 32$ m/s.
As coordenadas iniciais da fruta: $x_0 = D = 24$ m; $y_0 = H = 32$ m e $v_{0y} = 0$; $v_{0x} = 0$

Tabela 5.3: Condições iniciais e equações horárias do projétil e da fruta.

Projétil		Fruta
Direção horizontal	Direção vertical	Movimento unidimensional
$x_{0P} = 0$ $a_{xP} = 0$ $v_{0xP} = 24$ m/s $v_{xP} = v_{0xP} = 24$ m/s $x_P = 24 \cdot t$	$y_{0P} = 0$ $a_{yP} = -10$ m/s² $(-g)$ $v_{0yP} = 32$ m/s $v_{yP} = 32 - 10 \cdot t$ $y_P = 32 \cdot t - 5 \cdot t^2$	$x_{0F} = D = 24$ m $y_{0F} = H = 32$ m $v_{yF} = -10 \cdot t$ $y_F = 32 - 5 \cdot t^2$

A **Figura 5.23** ilustra o ponto de encontro entre a fruta e o projétil.

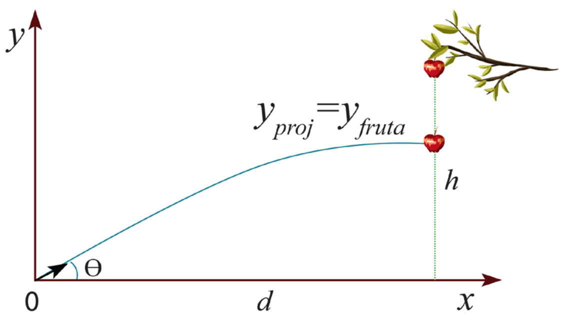

Figura 5.23: As coordenadas do ponto de impacto do projétil e da fruta, consideradas como ponto material, são coincidentes.

No ponto de impacto, as coordenadas x e y tanto da fruta quanto do projétil são iguais.

$$x_{\text{fruta}} = x_{\text{projétil}} = 24 \text{ m}$$

Da segunda condição inferimos que:

$$y_{\text{fruta}} = y_{\text{projétil}}$$

$$32 - 5t^2 = 32t - 5t^2,$$

ou seja, o impacto ocorre para o tempo dado por

$$32 = 32t$$

Portanto, para $t = 1$ s, ocorre o impacto do projétil contra a fruta.

A determinação da ordenada y do ponto de impacto pode ser feita por meio da equação horária de $y = f(t)$ tanto da fruta quanto do projétil. Então:

$$y = 32 - 5(1)^2 = 27 \text{ m}.$$

Portanto, o projétil encontra a fruta no ponto de coordenadas $x = 24$ m e $y = 27$ m.