FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS 6

Gil da Costa Marques

Fundamentos de Matemática I

6.1 Potência de expoente real
6.2 Funções inversas
6.3 Função exponencial
6.4 Função logarítmica
6.5 Função logarítmica como função inversa
6.6 O Número de Napier (o número e)
6.7 Curta História do número e e dos Logaritmos Neperianos

Licenciatura em Ciências · USP/ Univesp

6.1 Potência de expoente real

Os arqueólogos lograram êxito em encontrar cerca de meio milhão de tábulas de argila na região da Mesopotâmia. Por meio delas os pesquisadores descobriram que a civilização, que ali habitou em tempos tão remotos quanto 2000 anos antes de Cristo, já tinha conhecimento da operação de potenciação. De fato, algumas tábulas contêm tabelas que exibem valores de a^n para n de 1 até 10 e para valores de a relativamente grandes (até $a = 225$).

Podemos generalizar a operação definida em **Funções Polinomiais**, para o caso da potência n do número real a, com $n \in \mathbb{N}^*$, representada por a^n, considerando agora expoente um número real qualquer.

Em primeiro lugar, sendo a um número real não nulo e z um número inteiro qualquer,

- se $z \geq 0$, a^z é a potência definida em "Funções Polinomiais"
- se $z < 0$, então $-z > 0$ e definimos $a^z = 1/(a^{-z})$ 6.1

Convém notar que, para $z = -1$, estamos definindo, em **6.1**, o número inverso de a.

Sendo agora a um número real não nulo e p/q um número racional, com p e q inteiros não nulos, definimos

$$a^{p/q} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p = \sqrt[q]{a^p} \qquad 6.2$$

A existência de $a^{p/q}$ e a validade de **6.2** irão depender do sinal de a em combinação com o fato de p e q serem pares ou ímpares.

Assim, para $z = ½$,

$$a^{1/2} = \sqrt{a} \qquad 6.3$$

só existe se $a \geq 0$.

Estamos, portanto, ampliando o conceito de potenciação de um número, a fim de incluir potências de números reais. Até o presente momento definimos potências com expoente racional. Adiante, definiremos potências de expoente real, como por exemplo $2^{\sqrt{2}}$ ou 3^{π}.

A extensão da operação de potenciação até aqui estabelecida permite-nos introduzir, como já fizemos para os números inteiros e positivos, funções de expoente racional, como por exemplo a função

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \tag{6.4}$$

cujo domínio é o conjunto dos números reais não negativos.

Podemos construir uma tabela, atribuindo valores para a variável independente e determinando os correspondentes valores da variável dependente:

Tabela 6.1: Valores da função raiz quadrada.

$x = 0$	$f(0) = 0$
$x = 1$	$f(1) = 1$
$x = 4$	$f(4) = 2$
$x = 9$	$f(9) = 3$
$x = 16$	$f(16) = 4$

A **Figura 6.1** apresenta os gráficos das funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = -\sqrt{x}$.

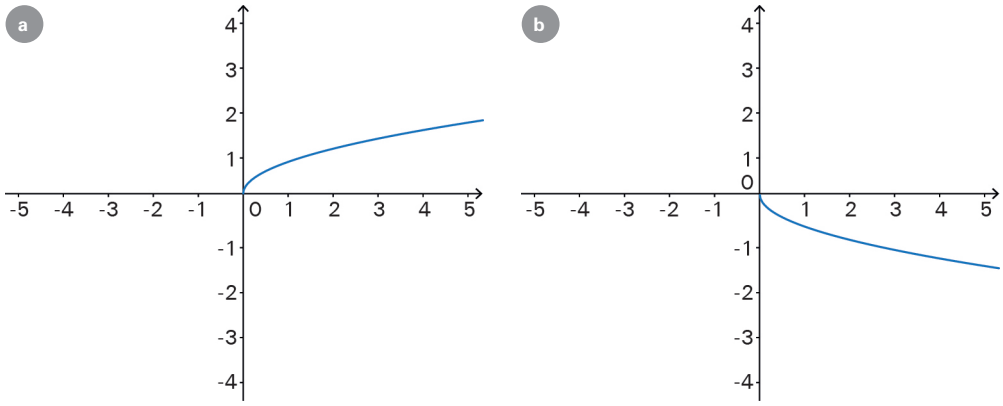

Figura 6.1: (a) gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$ e **(b)** gráfico da função $g(x) = -\sqrt{x}$.

A **Figura 6.2** apresenta os gráficos das funções $f(x) = 1/x$ e $g(x) = -1/x$.

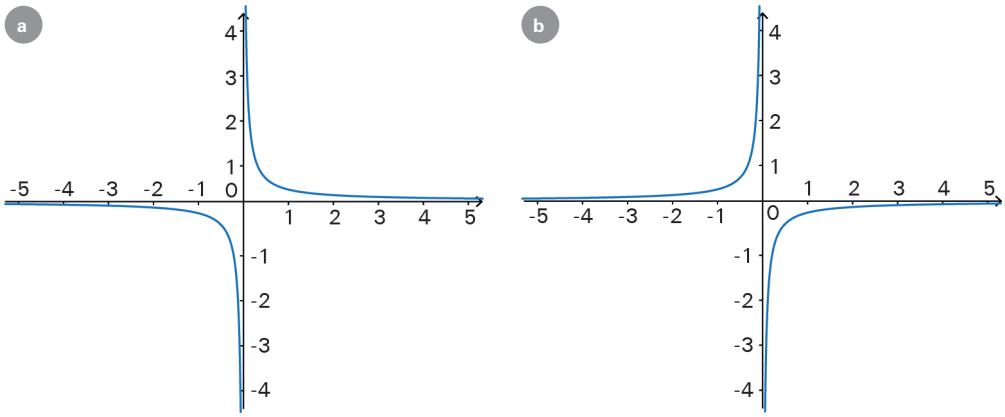

Figura 6.2: (a) Gráfico da função $f(x) = 1/x$ e **(b)** gráfico da função $g(x) = -1/x$.

6.2 Funções inversas

Funções de expoente real podem ser utilizadas para ilustrar o conceito de função inversa de uma forma relativamente simples. Para ilustrar isso, consideremos a função $f(x) = x^z$. De modo geral, respeitadas as condições de domínio, ela tem como função inversa a função cujo expoente na variável independente é o inverso do expoente da função dada, isto é:

$$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{z}}, z \neq 0 \tag{6.5}$$

De fato, pode-se facilmente verificar que

$$f \circ f^{-1}(x) = \left(f^{-1}(x)\right)^z = \left(x^{\frac{1}{z}}\right)^z = x^{\frac{z}{z}} = x \tag{6.6}$$

Assim, por exemplo, as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^{1/2}$ são funções inversas uma da outra, respeitadas as condições de domínio.

A função $f(x) = x$ tem inversa, que coincide com ela mesma, isto é $f^{-1}(x) = x$. De fato, $f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = f(x) = x$.

Analogamente, a função $f(x) = 1/x$ tem inversa que coincide com ela mesma, isto é $f^{-1}(x) = 1/x$. De fato, $f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$.

É importante observar que funções inversas uma da outra possuem gráficos que são simétricos em relação à reta $y = x$. Isso se deve ao fato de a composta de duas funções inversas uma da outra ser a função identidade. Como exemplo, a **Figura 6.3** apresenta os gráficos das funções $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$ no mesmo sistema de coordenadas, bem como a reta $y = x$.

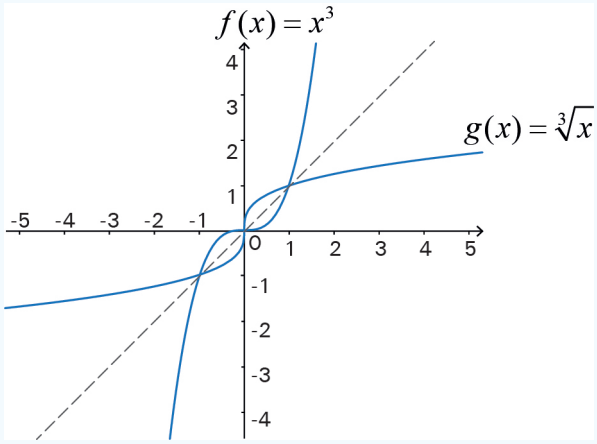

Figura 6.3: Gráficos das funções $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

6.3 Função exponencial

Numa das tábulas do Louvre, encontra-se um problema de juros compostos. Nesse problema, formulado em cerca de 1700 a.C., procura-se determinar por quanto tempo se deve aplicar uma quantia, admitindo-se uma rentabilidade de 20% ao ano, para que ela dobre de valor. Vem, portanto, talvez da Babilônia, o primeiro exemplo de uso da função exponencial.

A **função exponencial** de base a, onde $a > 0$ e $a \neq 1$, é a função $f(x)$ definida por:

$$f(x) = a^x \quad \text{com } a > 0 \text{ e } a \neq 1 \tag{6.7}$$

Para valores de $a > 1$, essa função é sempre crescente. Para valores de $0 < a < 1$, no entanto, ela é uma função decrescente.

Consideremos o caso da função exponencial de base 2. Nesse caso, escrevemos

$$f(x) = 2^x \tag{6.8}$$

Para ilustrar o conceito de função exponencial, recorremos ao exemplo, narrado no livro de Malba Tahan, do Marajá, que a fim de saldar uma dívida concordou em fazer o pagamento a Sessa (um dos seus súditos) da seguinte maneira: no primeiro ano, o súdito receberia apenas um grão de trigo. No segundo ano, ele receberia míseros dois grãos de trigo, duplicando daí em diante, a cada ano, o número de grãos até a última casa do tabuleiro de xadrez.

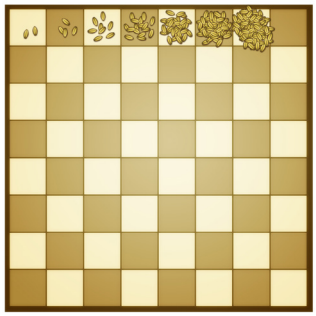

Figura 6.4: Ilustração da "Recompensa de Sessa", um conto de Malba Tahan, do livro *Lendas do oásis*.

Assim, o número de grãos N seria dado em função do número de anos n e expresso pela fórmula

$$N = 2^n. \tag{6.9}$$

O súdito elaborou a **Tabela 6.2**, baseada em uns poucos anos:

Tabela 6.2: Número de grãos a cada ano, até o sétimo ano.

Número de anos	1	2	3	4	5	6	7
Número de grãos de trigo	2	4	8	16	32	64	128

Para Pensar!

Quantos grãos seriam depois de 20 anos? E depois de 40?

Depois de 8 anos, deveria depositar na última casa da primeira fileira do tabuleiro apenas 256 grãos. Uma bagatela, portanto. Não entendendo de funções exponenciais, o soberano aceitou, para sua desgraça, essa forma de pagamento.

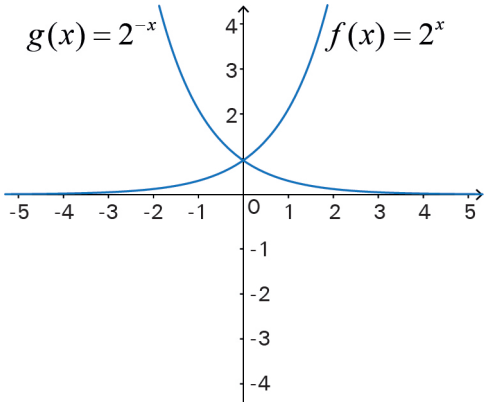

Figura 6.5: Gráficos das funções exponenciais $f(x) = 2^x$ e $g(x) = (1/2)^x = 2^{-x}$.

A função exponencial mais importante entre todas, do ponto de vista científico, é a função exponencial que tem como base o número e. Esse número, assim como o número π, é um dos números mais importantes das ciências. Ele será discutido no final deste texto.

Definimos a função exponencial de base e como a função

$$f(x) = e^x. \tag{6.10}$$

Mais usual na ciência é a função exponencial dependente de dois parâmetros a e b, definida por

$$f_1(x) = ae^{bx} = a\left(e^b\right)^x \tag{6.11}$$

que também pode aparecer escrita da seguinte maneira:

$$f_2(x) = Ae^{-bx}. \tag{6.12}$$

Alguns gráficos das funções exponenciais envolvendo o número e são apresentados na **Figura 6.6**.

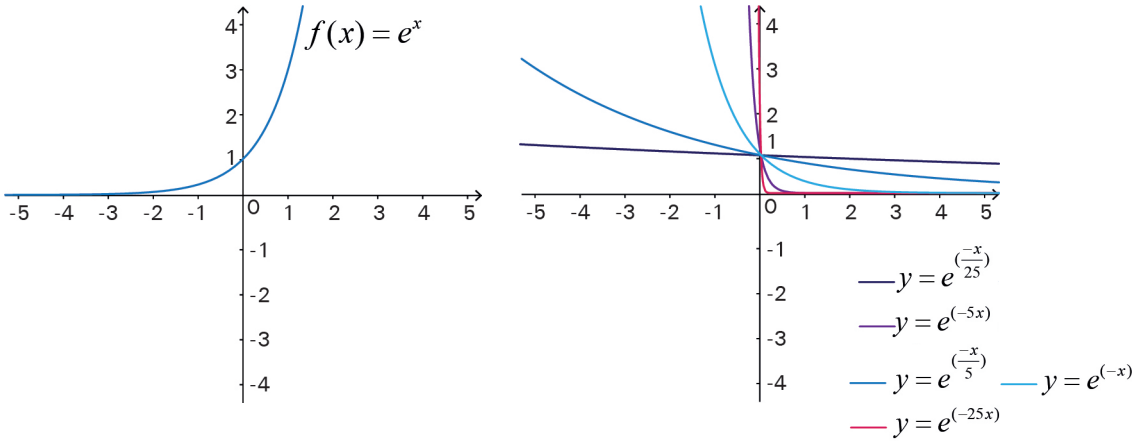

Figura 6.6: Gráficos de funções exponenciais envolvendo o número e.

Um bom exemplo da relevância da função exponencial de base e diz respeito ao decaimento de substâncias radioativas. Nesse caso, o número de átomos N que compõem uma determinada substância varia com o tempo (t) de acordo com a expressão

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{6.13}$$

onde N_0 é o número de átomos presentes no instante de tempo $t = 0$ e λ é uma constante característica do material, que recebe o nome de **constante radioativa**.

Definimos ainda funções exponenciais especiais considerando combinações de funções exponenciais. Por exemplo, definimos as funções: seno hiperbólico e cosseno hiperbólico como aquelas dadas pelas combinações:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{6.14}$$

6.4 Função logarítmica

A descoberta dos logaritmos foi motivada pela busca de simplificações em expressões algébricas ou aritméticas complexas. Com os logaritmos podemos reduzir multiplicações, divisões, potências e raízes a expressões muito mais simples, contendo apenas somas (ou diferenças) de números ou multiplicações (ou divisões) mais simples.

É o caso, por exemplo, da determinação do número c, que resulta da seguinte expressão:

$$c = \frac{(7{,}2)^{\frac{1}{15}} 4^{\frac{1}{5}}}{(14)^{\frac{3}{7}}} \tag{6.15}$$

que, sem logaritmos, é complicada...

Antes da invenção do logaritmo de um número, tais operações eram muito trabalhosas. Era a época das grandes navegações e havia, então, a necessidade de se trabalhar com números muito grandes sem, evidentemente, o auxílio de qualquer instrumento de cálculo.

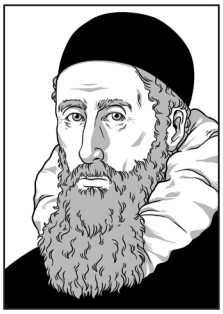

Figura 6.7: John Napier (1550-1617), escocês, foi teólogo e matemático.

Ao criar os logaritmos, Napier encontrou uma forma de simplificar os cálculos.

O logaritmo, agora designado por x, de um número positivo a, na base b, $b > 0$ e $b \neq 1$, é o expoente x, da base b, necessário para que se obtenha o número a. Ou seja,

$$b^x = a. \tag{6.16}$$

Assim, levando-se em conta a definição, representamos esse número da seguinte maneira:

$$x = \log_b a \Leftrightarrow b^x = a, \text{ onde } b > 0 \text{ e } b \neq 1, \text{ e } a > 0. \tag{6.17}$$

Vale observar que a base b do logaritmo é a mesma base da exponencial associada e que

$$x = \log_b a = \log_b b^x \tag{6.18}$$

O raciocínio de John Napier para inventar o logaritmo de um número baseava-se na procura de uma forma de associar os números de uma progressão geométrica

$$b, b^2, b^3, \ldots, b^m, \ldots, b^n, \ldots \tag{6.19}$$

aos números da progressão aritmética

$$1, 2, 3, \ldots, m, \ldots, n, \ldots \tag{6.20}$$

Essa associação é tal que o produto $b^m.b^n$ de dois termos da progressão geométrica está associado à soma de dois termos $m + n$ da progressão aritmética. Essa é a simplificação introduzida por Napier quando do cálculo envolvendo produtos de dois números.

Assim, dados dois números quaisquer a_1 e a_2, tais que

$$\begin{aligned} a_1 &= b^{x_1} \\ a_2 &= b^{x_2} \end{aligned} \tag{6.21}$$

lembrando que

$$a_1 a_2 = b^{x_1} b^{x_2} = b^{x_1 + x_2} \tag{6.22}$$

então, a fim de encontrar o produto $a_1 a_2$, somamos os expoentes do produto das potências de mesma base b, para em seguida encontrar o número inicialmente procurado.

Levando-se em conta, então, a propriedade das potências de mesma base acima, concluímos que o logaritmo do produto de dois números é igual à soma dos logaritmos desses números, isto é, **6.23**.

$$\log_b(a_1 a_2) = \log_b(a_1) + \log_b(a_2) = x_1 + x_2 \tag{6.23}$$

É usual a adoção de uma convenção mediante a qual escrevemos os logaritmos na base 10 suprimindo a referência a essa base. Assim, escrevemos:

$$\log x = \log_{10}(x). \tag{6.24}$$

Assim, podemos escrever, por exemplo,

$$\log(10.1000) = \log(10) + \log(1000) = 1 + 3 = 4. \tag{6.25}$$

A expressão acima constitui um exemplo para a propriedade geral, que pode ser demonstrada por indução finita sobre o número p:

$$\log_a(b)^p = p \log_a b. \tag{6.26}$$

E portanto, por exemplo, no caso do logaritmo de base 10, podemos escrever:

$$\log_{10}(10)^p = p \log 10 = p, \tag{6.27}$$

uma vez que log10 = 1.

Assim, para quaisquer dois elementos da progressão geométrica mencionada anteriormente, Napier encontrou o resultado:

$$\log_a\left(a^n a^m\right) = \log_a a^{n+m} = m + n. \tag{6.28}$$

Observe que, da definição de logaritmo, temos

$$\log_b 1 = 0 \tag{6.29}$$

qualquer que seja a base b, $b > 0$ e $b \neq 1$.

E que:

$$\log_b\left(\frac{1}{a}\right) = -\log_b(a) \tag{6.30}$$

sempre que $a > 0$.

Briggs, contemporâneo de Napier, elaborou as tabelas de logaritmos que mais foram difundidas.

As tabelas de logaritmos hoje em dia mais utilizadas são aquelas na base 10, além daquelas na base e, mais úteis nas Ciências.

A título de exemplo, consideremos a expressão **6.15**:

$$c = \frac{(7{,}2)^{\frac{1}{15}} 4^{\frac{1}{5}}}{(14)^{\frac{3}{7}}} \tag{6.15}$$

Para calcular o número c, tomamos o logaritmo, por exemplo, na base 10, nos dois membros da igualdade. Encontramos então:

$$\log_{10} c = \frac{1}{15}\log_{10}(7{,}2) + \frac{1}{5}\log_{10}(4) - \frac{3}{7}\log_{10}(14) \tag{6.31}$$

A solução agora envolve o recurso a tabelas de logaritmos.

Napier passou cerca de 20 anos desenvolvendo os logaritmos, bem como escrevendo tabelas para os seus logaritmos, tendo percebido que, afinal, muitas vezes, os problemas envolvem o processo inverso, isto é, descobrir um número dado o seu logaritmo.

6.5 Função logarítmica como função inversa

Definimos a função logaritmo de base b como a função:

$$f(x) = \log_b x \text{ onde } b > 0 \text{ e } b \neq 1 \tag{6.32}$$

a qual associa, a um número real positivo, o seu logaritmo na base b.

O domínio da função logarítmica é o conjunto dos números reais estritamente positivos, isto é, $\mathbb{R}_+^*$.

Muitas vezes, essa função é definida como a função inversa da função exponencial. De fato, pode-se verificar que, se escrevermos a função logarítmica como a função inversa da função $g(x)$,

$$g^{-1}(x) = \log_b x \tag{6.33}$$

onde

$$g(x) = b^x \tag{6.34}$$

então,

$$\left(g^{-1} \circ g(x)\right) = \log_b\left(g(x)\right) = \log_b\left(b^x\right) = x \tag{6.35}$$

Na **Figura 6.8** apresentamos os gráficos das funções $g(x) = 2^x$ e $g^{-1}(x) = \log_2 x$, que são inversas uma da outra e, portanto, têm seus gráficos simétricos em relação à reta $y = x$.

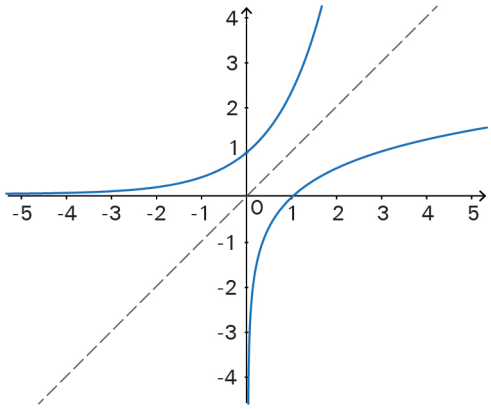

Figura 6.8: Os gráficos da função exponencial e logarítmica de mesma base 2.

Outros gráficos de funções logarítmicas em diferentes bases, todas maiores do que 1, são apresentados na **Figura 6.9**. É importante ressaltar que a função logaritmo assume valores negativos quando a variável independente assume valores pertencentes ao intervalo]0,1[.

Outros gráficos de funções logarítmicas em diferentes bases, todas maiores do que 0 e menores do que 1, são apresentados na **Figura 6.10**. É importante ressaltar que agora a função logaritmo assume valores positivos quando a variável independente assume valores pertencentes ao intervalo]0,1[.

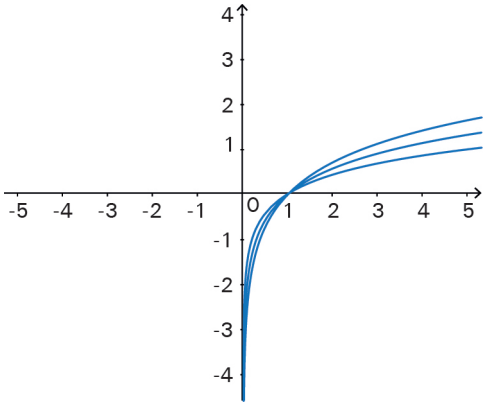

Figura 6.9: Gráficos típicos de funções logarítmicas, de bases maiores do que 1.

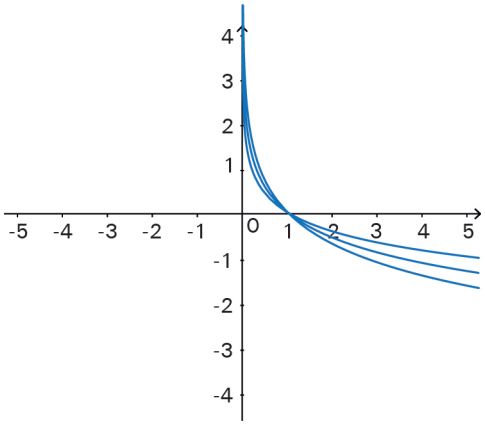

Figura 6.10: Gráficos típicos de funções logarítmicas, de bases maiores do que 0 e menores do que 1.

6.6 O Número de Napier (o número e)

Consideremos um número muito próximo de 1, que designaremos por n_1. Consideremos o caso em que ele é uma função de um número inteiro e positivo n, da seguinte maneira:

$$n_1(n) = 1 + \frac{1}{n} \tag{6.36}$$

Vamos fazer uma tabela (**Tabela 6.3**) atribuindo valores para n, e para cada um deles determinamos o correspondente valor de n_1.

Tabela 6.3: Valores da função **6.36**.

n	n_1
10	1,1
10^2	1,01
10^3	1,001
10^4	1,0001
...	...
10^{10}	1,0000000001
...	...

Consideremos agora números definidos pela potenciação, de expoente n, do número n_1, definido por:

$$\left(n_1(n)\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad 6.37$$

Podemos agora acrescentar uma nova coluna à tabela anterior, com resultados evidentemente aproximados:

Tabela 6.4: Valores da função **6.37** para diferentes valores de n.

n	n_1	$(n_1(n))^n$
10	1,1	2,5937
10^2	1,01	2,7048
10^3	1,001	2,7169
10^4	1,0001	2,7184
...	...	...
10^{10}	1,0000000001	
...	...	

O número e é definido por meio de um limite quando o número n cresce indefinidamente, o que é expresso dizendo que "n tende ao infinito". Formalmente, escrevemos:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad 6.38$$

6.7 Curta História do número *e* e dos Logaritmos Neperianos

Com o intuito de resolver o problema apresentado no início da seção sobre logaritmos (a seção 6.4), Napier fez um raciocínio interessante. Considerou uma solução em que o valor de a da progressão geométrica diferisse pouco do caso trivial, no qual $a = 1$. Pensou numa progressão geométrica de tal forma que o número a se diferenciasse pouco do número 1. Escolheu $a = 0{,}9999999$, que pode ser escrito, numa boa aproximação, como:

$$a = 1 - 10^{-7} \cong \frac{1}{1+10^{-7}} \tag{6.39}$$

Em seguida, procurou escrever um número N, começando pelos inteiros, de tal forma que esse número pudesse ser escrito como o produto de um número grande (10^7) vezes o número $a = 0{,}9999999$ elevado a um expoente L resultando um número qualquer, inclusive um número pequeno. Escreveu assim:

$$N = 10^7 \left(\frac{1}{1+10^{-7}} \right)^L \cong 10^7 \left(0{,}9999999\right)^L \tag{6.40}$$

Percebeu assim, grosso modo, que qualquer número poderia ser escrito em termos de uma potência de a. Lembramos que sua primeira escolha foi tal que o valor desse número a é muito próximo de 1. Assim, números próximos de 1 requerem um valor de L pequeno. No entanto, à medida que nos afastamos do valor 1, essa escolha nos leva a valores de L extremamente grandes em módulo. Considere, por exemplo, o valor de $L = 10^7$. O número a ele associado é o número e de Napier:

$$e = \left(1+10^{-7}\right)^{10^7} \cong 2{,}7182818 \tag{6.41}$$

Napier definiu L como o logaritmo do número N. A escolha feita por Napier, do fator 10^7, se deve à necessidade de evitar decimais. Observe que, dividindo-se tanto N quanto L pelo fator já mencionado, obtemos, de **6.40**, **6.42**.

$$\frac{N}{10^7} = \left[\left(\frac{1}{1+10^{-7}}\right)^{10^7}\right]^{\frac{L}{10^7}} \qquad 6.42$$

Donde obtemos um sistema de logaritmos na base $1/e$, onde e é um número – o número de Napier, o qual pode ser identificado como o dado, aproximadamente, por:

$$\frac{1}{e} = \left(\frac{1}{1+10^{-7}}\right)^{10^7} = \left(1+10^{-7}\right)^{-10^7} \qquad 6.43$$

Napier descobriu, assim, um número que, dentro de boa aproximação, é dado por **6.41**. Sua definição mais exata envolve grandes números, como previsto por Napier. A melhor definição desse número, também conhecido como número de Euler (que, posteriormente, o popularizou), é aquela vista em

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad 6.38$$

de onde decorre que

$$\frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n. \qquad 6.44$$

Definimos a função logaritmo natural (ln) como a função logaritmo de base e. Ou seja,

$$f(x) = \ln x = \log_e x. \qquad 6.45$$

Sua inversa é a função exponencial de base e

$$f(x) = e^x \qquad 6.46$$

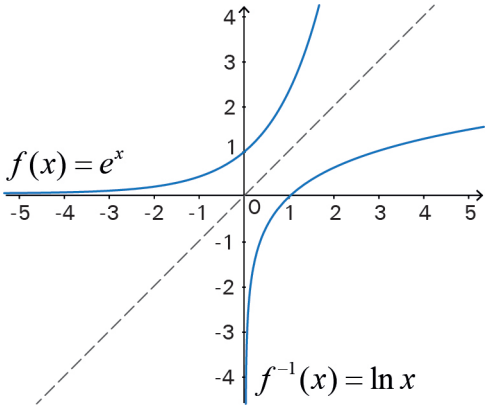

Figura 6.11: Gráfico da função exponencial de base e: $f(x) = e^x$ e da função logarítmica de base e: $f^{-1}(x) = \ln x$ no mesmo sistema de coordenadas.

Os logaritmos neperianos, aqueles inventados por Napier, muitas vezes são confundidos com os logaritmos naturais, que estão definidos acima. A rigor, isso não é verdade, uma vez que os

logaritmos originais de Napier têm mais a ver com logaritmos definidos na base $1/e$. Os logaritmos neperianos são definidos por:

$$\frac{Nap(\log x)}{10^7} = \log_{1/e}\left(\frac{x}{10^7}\right) \tag{6.47}$$

O nome logaritmo foi cunhado por Napier ao procurar dar a ele a conotação de "número da razão", uma vez que *Logos* em grego significa razão.