TÉCNICAS DE DIFERENCIAÇÃO 13

Gil da Costa Marques

13.1 Introdução
13.2 Derivada da soma ou da diferença de funções
13.3 Derivada do produto de funções
13.4 Derivada de uma função composta: a Regra da Cadeia
13.5 Derivada do quociente de funções
13.6 Derivada de $y = x^{\alpha}$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$
13.7 Derivada da função inversa
13.8 Diferencial de uma função de uma variável real
13.9 As regras de L'Hospital

Licenciatura em Ciências · USP/ Univesp

13.1 Introdução

A seguir apresentaremos as técnicas de derivação para funções de uma variável. O objetivo de tais técnicas é o de facilitar o cálculo de derivadas a fim de não precisar recorrer sempre à definição de derivada de uma função num ponto interior ao seu domínio.

Vamos, primeiramente, relembrar o conceito de derivada!

Consideremos uma função $y = f(x)$ definida num aberto contido em seu domínio, sendo x um ponto interior a esse aberto, e suponhamos que a variável x experimenta, nesse intervalo, um aumento infinitesimal Δx (ou seja, infinitamente pequeno), acarretando uma variação infinitamente pequena da própria função, Δy. Consequentemente, a **razão das diferenças**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad 13.1$$

envolve o quociente de quantidades infinitamente pequenas. No entanto, analisando o comportamento do quociente, quando ambos, denominador e numerador tendem simultaneamente a zero, a razão representada pela expressão **13.1** poderá convergir para um valor bem determinado. Esse limite, se existir, varia com x, e é denominado a derivada da função f no ponto x.

Por exemplo, se definirmos $f(x) = x^m$, m designando um valor inteiro, a razão entre as diferenças infinitesimais será:

$$\frac{(x+\Delta x)^m - x^m}{\Delta x} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}\Delta x + \cdots + \Delta x^{m-1} \qquad 13.2$$

No limite, quando a diferença Δx tende a zero, essa razão será a quantidade mx^{m-1}, isto é, uma nova função da variável x. Para indicar essa dependência, daremos o nome de **derivada** à nova função e a designaremos, utilizando a notação de Cauchy, por y' ou $f'(x)$, ou ainda, usando a notação de Leibniz, por $\frac{df}{dx}(x)$.

A seguir analisaremos propriedades importantes das derivadas. Encerraremos o texto abordando, rapidamente, o conceito de diferencial de uma função.

13.2 Derivada da soma ou da diferença de funções

Se f e g são funções deriváveis, então, a soma $f + g$ é igualmente derivável. A derivada da soma é igual à soma das derivadas das suas parcelas:

$$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \quad \text{ou} \quad (f+g)' = f' + g' \tag{13.3}$$

Para a diferença de duas funções, vale um resultado análogo:

$$\frac{d(f-g)}{dx} = \frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx} \quad \text{ou} \quad (f-g)' = f' - g' \tag{13.4}$$

O resultado acima para a derivada da soma pode ser facilmente verificado a partir da definição de derivada. Para isso, consideramos as taxas de variação da função soma de duas funções. De acordo com a sua definição, escrevemos:

$$\begin{aligned} \Delta(f+g)(x) &= (f+g)(x+\Delta x) - (f+g)(x) = \\ &= f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - f(x) - g(x) = \\ &= f(x+\Delta x) - f(x) + g(x+\Delta x) - g(x) \end{aligned} \tag{13.5}$$

Donde se infere que:

$$\frac{\Delta(f(x)+g(x))}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \tag{13.6}$$

Considerando o limite da expressão **13.6**, quando $\Delta x \to 0$, obtemos **13.3**, uma vez que os limites das duas parcelas no segundo membro da igualdade acima existem e são finitos, já que as funções f e g são deriváveis.

No caso da diferença de funções deriváveis, a verificação é análoga.

Exemplos

- Exemplo 1:

Consideremos as funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = x^3$. Vamos encontrar a derivada da função $f + g$.

Temos: $\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = \cos x$ e $\frac{dg}{dx}(x) = g'(x) = 3x^2$

Assim: $\frac{d(f+g)}{dx}(x) = (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = \cos x + 3x^2$

- Exemplo 2:

Dada a função $y = f(x)$, definida por $f(x) = 5x^2 - 6x + 9$, vamos calcular a função derivada.

Temos: $\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(5x^2 - 6x + 9\right)$

Como

$$\frac{d}{dx}\left(5x^2\right) = 10x$$

$$\frac{d}{dx}(6x) = 6$$

$$\frac{d}{dx}(9) = 0$$

Então, $\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(5x^2 - 6x + 9\right) = 10x - 6$.

13.3 Derivada do produto de funções

Se f e g são deriváveis, então, o produto $f \cdot g$ é derivável. Para o produto de duas funções vale a propriedade:

$$\frac{d(f.g)}{dx} = \frac{df}{dx} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dx} \quad \text{ou} \quad (f.g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \qquad 13.7$$

Para deduzir tal propriedade, iniciamos com a definição de taxa de variação média para o produto de duas funções. Assim, por definição, temos:

$$\Delta(f \cdot g) = (f \cdot g)(x + \Delta x) - (f \cdot g)(x) = f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \qquad 13.8$$

ou seja, somando e subtraindo um conveniente termo,

$$\Delta(f.g) = f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) \quad 13.9$$

ou, agrupando de modo apropriado,

$$\Delta(f.g) = \big(f(x+\Delta x) - f(x)\big)g(x+\Delta x) + f(x)\big(g(x+\Delta x) - g(x)\big) \quad 13.10$$

Calculando o limite quando $\Delta x \to 0$, temos:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(f.g)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x+\Delta x) + \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}f(x)\right] \quad 13.11$$

equação que nos leva ao resultado **13.7**, uma vez que

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) = f(x) \text{ e } \lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x) = g(x),$$

bem como

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x) \text{ e } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = g'(x),$$

pois as funções f e g são deriváveis.

Da propriedade relativa ao produto de funções, podemos facilmente deduzir que, se k for uma constante qualquer, resultará:

$$\frac{d(kf)}{dx} = k\frac{df}{dx} \quad \text{ou} \quad (kf)' = kf' \quad 13.12$$

- Exemplo 3:

Sendo $f(x) = 4x^3.\cos x$, vamos encontrar sua derivada.

Temos:

$$g(x) = 4x^3 \Rightarrow g'(x) = 12x^2$$
$$h(x) = \cos x \Rightarrow h'(x) = -\operatorname{sen} x$$

Assim, como a derivada do produto é dada por $(gh)'(x) = g'(x).f(x) + g(x).f'(x)$, temos:

$$f'(x) = 12x^2 \cdot \cos x + 4x^3 \cdot (-\operatorname{sen} x) = 12x^2 \cdot \cos x - 4x^3 \cdot \operatorname{sen} x$$

- Exemplo 4:

Vamos calcular a derivada da função $f(x) = 5x^4.\operatorname{sen} x.\cos x$. Temos:

$$g(x) = 5x^4 \Rightarrow g'(x) = 20x^3$$
$$h(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow h'(x) = \cos x$$
$$z(x) = \cos x \Rightarrow z'(x) = -\operatorname{sen} x$$

A fim de calcular a derivada do produto das três funções, observamos que, escrevendo de maneira abreviada,

$$(ghz)' = (gh)' \cdot z + (gh) \cdot z' = (g' \cdot h + g \cdot h') \cdot z + g \cdot h \cdot z' = g' \cdot h \cdot z + g \cdot h' \cdot z + g \cdot h \cdot z'$$

e, portanto,

$$f'(x) = (20x^3) \cdot (\operatorname{sen} x) \cdot (\cos x) + (5x^4) \cdot (\cos x) \cdot (\cos x) + (5x^4) \cdot (\operatorname{sen} x) \cdot (-\operatorname{sen} x) =$$
$$= 20x^3 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x + 5x^4 \cdot \cos^2 x - 5x^4 \cdot \operatorname{sen}^2 x =$$
$$= 20x^3 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x + 5x^4 (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)$$

- Exemplo 5:

Sendo $f(x) = 7 \operatorname{sen} x$, vamos encontrar sua derivada.
Vimos que, sendo k uma constante, temos $(k.f)' = k.f'$, uma vez que a derivada de uma função constante é zero.
Assim, $f'(x) = 7 \cos x$.

13.4 Derivada de uma função composta: a Regra da Cadeia

Para a especial operação de composição de duas funções deriváveis, temos uma maneira especial de calcular a derivada da função composta, denominada Regra da Cadeia. Se $y = h(u)$ e $u = g(x)$, ou seja, $y = h(g(x))$, sendo h e g deriváveis, então, a função composta $y = h(g(x))$ é derivável e sua derivada é dada pela expressão:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dh}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad 13.13$$

Assim, basta lembrar que, se $y = h(g(x))$, então, a taxa de variação média será dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta h}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{13.14}$$

ou seja,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h(u+\Delta u)-h(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{h(u+\Delta u)-h(u)}{\Delta u}\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} \tag{13.15}$$

Então, quando $\Delta x \to 0$, temos $\Delta u \to 0$ e, supondo que $\Delta u \neq 0$, temos:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta h}{\Delta u}.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right] = h'(u).g'(x) = h'(g(x)).g'(x) \tag{13.16}$$

que é precisamente **13.13**.

Entretanto, essa prova não é geral porque, para valores arbitrariamente pequenos de Δx, poderia acontecer que Δu fosse zero e o cálculo acima não seria válido. Uma demonstração mais geral pode ser encontrada em textos de Cálculo Diferencial.

Adiante, utilizando o conceito de diferencial de uma função, novamente estaremos trabalhando com a composição de funções e a Regra da Cadeia reaparecerá.

- Exemplo 6:

Consideremos a função $f(x) = \text{sen}^4 x = (\text{sen}\, x)^4$ e vamos calcular sua derivada.
Para tanto façamos:

$$h(x) = \text{sen}\, x$$

logo

$$f(x) = \text{sen}^4 x = (\text{sen}\, x)^4 = (h(x))^4$$

Desse modo:

$$\frac{df}{dh}(h) = 4h^3$$

e:

$$\frac{dh}{dx}(x) = \cos x$$

Logo, pela Regra da Cadeia:

$$f'(x)=\frac{df}{dx}(x)=\frac{df}{dh}\big(h(x)\big)\cdot\frac{dh}{dx}(x)=4\big(h(x)\big)^3\cdot(\cos x)=4\operatorname{sen}^3 x\cdot\cos x$$

- Exemplo 7:

Sendo $f(x)=\operatorname{sen}x^5$, vamos calcular sua derivada.
Para tanto, façamos:

$$h(x)=x^5$$

o que acarreta:

$$f(x)=\operatorname{sen}h(x)$$

Temos então:

$$h'(x)=\frac{dh}{dx}(x)=5x^4$$

e

$$f'(h)=\frac{df}{dh}(h)=\cos h$$

Portanto, de acordo com a Regra da Cadeia, temos:

$$f'(x)=\frac{df}{dx}(x)=\frac{df}{dh}\big(h(x)\big)\cdot\frac{dh}{dx}(x)=\big(\cos h(x)\big)\cdot 5x^4=5x^4\cdot\cos x^5$$

13.5 Derivada do quociente de funções

Seja

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \qquad 13.17$$

de tal modo que $h(x)\neq 0$. Assumindo que f e g são deriváveis, vamos mostrar que a derivada da função f é dada por:

$$\frac{df}{dx}(x)=\frac{\frac{dg}{dx}(x)\cdot h(x)-g(x)\cdot\frac{dh}{dx}(x)}{\big[h(x)\big]^2}\quad\text{ou}\quad\left(\frac{g}{h}\right)'=\frac{g'h-gh'}{h^2} \qquad 13.18$$

Para tanto, vamos escrever a função f como um produto:

$$f(x) = g(x) \cdot \frac{1}{h(x)} = g(x) \cdot \left[h(x)\right]^{-1}$$

Então, derivando o produto das duas funções, temos:

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{dg}{dx}(x) \cdot \left[h(x)\right]^{-1} + g(x) \cdot \frac{d}{dx}\left[h(x)\right]^{-1}$$

Pela Regra da Cadeia, temos $\frac{d}{dx}\left[h(x)\right]^{-1} = -\left[h(x)\right]^{-2} \cdot h'(x)$.

Logo,

$$f'(x) = g'(x) \cdot \left[h(x)\right]^{-1} + g(x) \cdot (-1) \cdot \left[h(x)\right]^{-2} \cdot h'(x) =$$

$$= \frac{g'(x)}{h(x)} - \frac{g(x) \cdot h'(x)}{\left[h(x)\right]^2} = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{\left[h(x)\right]^2}$$

Desse modo, a derivada do quociente de duas funções deriváveis, sendo não nula a função do denominador, é dada por:

$$\left(\frac{g}{h}\right)'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{\left[h(x)\right]^2} \qquad 13.19$$

• Exemplo 8:
Dada $f(x) = \frac{x^4}{\operatorname{sen} x}$, vamos calcular sua derivada.
Fazendo

$$g(x) = x^4 \Rightarrow g'(x) = 4x^3$$

e

$$h(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow h'(x) = \cos x$$

utilizando a expressão para a derivada do quociente,

$$\left(\frac{g}{h}\right)'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{\left[h(x)\right]^2}$$

temos:

$$f'(x)=\left(\frac{x^4}{\operatorname{sen} x}\right)'=\frac{4x^3\cdot\operatorname{sen} x-x^4\cdot\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

- Exemplo 9:

Vamos encontrar a derivada de $\operatorname{tg} x=\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ em todo ponto em que o denominador não seja zero.

Fazendo

$$g(x)=\operatorname{sen} x \Rightarrow g'(x)=\cos x$$

e

$$h(x)=\cos x \Rightarrow h'(x)=-\operatorname{sen} x$$

utilizando a expressão para a derivada do quociente,

$$\left(\frac{g}{h}\right)'(x)=\frac{g'(x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h'(x)}{\left[h(x)\right]^2}$$

temos:

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cdot\cos x-\operatorname{sen} x\cdot(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

- Exemplo 10:

Vamos encontrar a derivada de $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ em todo ponto em que o denominador não seja zero.

Fazendo

$$g(x)=1 \Rightarrow g'(x)=0$$

e

$$h(x)=\cos x \Rightarrow h'(x)=-\operatorname{sen} x$$

utilizando a expressão para a derivada do quociente,

$$\left(\frac{g}{h}\right)'(x)=\frac{g'(x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h'(x)}{\left[h(x)\right]^2}$$

temos:

$$\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{0\cdot(\cos x)-1\cdot(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\operatorname{tg} x\cdot\sec x$$

13.6 Derivada de $y = x^{\alpha}$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$

Em **Derivadas das Funções Simples**, encontramos a derivada de $y = x^n$, quando n é um número inteiro.

O caso presente de

$$y = x^{\alpha} \tag{13.20}$$

envolve um expoente real, podendo ser racional ou irracional, e a questão de encontrar sua derivada será resolvida examinando essa função como a composição de duas outras.

De fato, podemos escrever

$$y = x^{\alpha} = e^{\ln x^{\alpha}} \tag{13.21}$$

uma vez que a função exponencial de base e e a função logarítmica de base e são funções inversas.

Assim, utilizando a propriedade dos logaritmos, ainda podemos escrever

$$y = x^{\alpha} = e^{\ln x^{\alpha}} = e^{\alpha \ln x}$$

E agora, encontramos a derivada da função com o auxílio da regra da cadeia:

$$y' = \underbrace{e^{\alpha \ln x}}_{\text{a derivada da exponencial de base } e} \cdot \alpha \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{a derivada do logaritmo de base } e} = x^{\alpha} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1} \tag{13.22}$$

É importante notar que a expressão encontrada para a derivada de $y = x^{\alpha}$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$, engloba o caso já analisado quando o expoente é um número inteiro.

- Exemplo 11:

Encontrar a derivada de

a. $y = x^{3/4}$

b. $y = x^{\sqrt{2}}$

Em ambos os casos, basta aplicar **13.22**, obtendo:

a. $y' = \frac{3}{4} x^{-1/4}$

b. $y' = \sqrt{2} x^{\sqrt{2}-1}$

• Exemplo 12:

Este exemplo merece atenção: se $y = x^2 + 2^x$, sua derivada, que é a derivada de uma soma de funções, é obtida pela aplicação de duas propriedades diferentes, uma para cada uma das parcelas:

$$y' = 2x + 2^x \cdot \ln 2$$

uma vez que, para derivar $f(x) = 2^x$, utilizamos o raciocínio anterior, isto é,

$$f(x) = 2^x = e^{\ln 2^x} = e^{x \ln 2}$$

e, daí,

$$f'(x) = e^{x \ln 2} \cdot \ln 2 = 2^x \cdot \ln 2$$

• Exemplo 13:

Analogamente, a derivada de $y = x^\pi + \pi^x$ é:

$$y' = \pi x^{\pi-1} + \pi^x \cdot \ln \pi$$

• Exemplo 14:

Tudo o que foi desenvolvido até aqui nos permite encontrar a derivada de

$$A(x) = f(x)^{g(x)}$$

O domínio da função A é constituído pelos números reais tais que $f(x) > 0$.
Podemos escrever então

$$A(x) = f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

e, portanto,

$$A'(x) = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \right]$$

ou seja,

$$A'(x) = f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$

13.7 Derivada da função inversa

Seja z uma função de x relacionada a outra função $y = f(x)$ pela expressão:

$$z = F(y) \tag{13.23}$$

Assim, $z = F(f(x))$ é comumente denominada **função de uma função** da variável de x. Ela foi definida anteriormente como a função composta

$$z = F \circ y \tag{13.24}$$

onde supomos que as funções $z = F(y)$ e $y = f(x)$ são ambas deriváveis em seus domínios. Denotando os acréscimos infinitamente pequenos por Δx, Δy e Δz, então, a taxa de variação média de z, com relação a x, é dada por:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{13.25}$$

Quando $\Delta x \to 0$, temos $\Delta y \to 0$ e, portanto,

$$\frac{dz}{dx}(x) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{13.26}$$

e, portanto, vale a relação:

$$z'(x) = F'(y) \cdot y'(x) = F'(f(x)) \cdot f'(x) \tag{13.27}$$

com a ressalva análoga observada em **13.16**.

Se a função f for a função inversa de F, isto é,

$$F \circ f = \mathrm{Id} \tag{13.28}$$

ou seja,

$$(F \circ f)(x) = F\big(f(x)\big) = \mathrm{Id}(x) = x \qquad 13.29$$

de onde $f = F^{-1}$ e, de **13.27**, segue-se que

$$\frac{dF}{df}\big(f(x)\big)\cdot\frac{df}{dx}(x) = \frac{dF}{df}\big(f(x)\big)\cdot\frac{dF^{-1}}{dx}(x) = 1 \qquad 13.30$$

Inferimos, pois, que a derivada da função inversa F^{-1} é dada, em termos da derivada da função F, como:

$$\frac{dF^{-1}(x)}{dx} = \left(\frac{dF}{df}\big[f(x)\big]\right)^{-1} \qquad 13.31$$

Com a ajuda da expressão **13.31**, podemos facilmente determinar a derivada da função inversa de uma dada função. Consideremos o caso das funções simples $y = A^x$, $y = \arcsen x$ e $y = \arccos x$, as quais podem ser obtidas a partir das derivadas das funções $y = \log_A x$, $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$.

Em **O Teorema do Valor Médio e Aplicações das Derivadas**, faremos uso da expressão **13.31** para encontrar as derivadas de funções simples a partir das derivadas das funções inversas.

- Exemplo 15:

Consideremos a função $f(x) = x^2$ com domínio D e imagem I dados por:

$$D = \mathbb{R}$$

$$I = \mathbb{R}_+$$

Nesse caso, f não admite inversa. Entretanto, considerando uma restrição do domínio, podemos definir, por exemplo, a função

$$f^+ : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}^*_+$$
$$x \mapsto x^2$$

De $y = x^2$ obtemos $x = \sqrt{y}$, isto é:

$$g(y) = \sqrt{y}$$

é a função inversa de f^+.

Pelo que vimos em **13.22**, já sabemos que a derivada de g é:

$$g'(y) = \frac{1}{2}y^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Vamos determinar a derivada de g utilizando o que vimos a respeito da derivada da função inversa. Temos, pelo teorema demonstrado,

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

ou seja,

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

pois $x = \sqrt{y}$, como queríamos mostrar.

- Exemplo 16:

As funções

$$y = f(x) \log_A x \quad (A > 0, A \neq 1)$$

e

$$x = g(y) = A^y \quad (A > 0, A \neq 1)$$

são inversas uma da outra.

Em **Derivadas das Funções Simples**, vimos como encontrar a derivada de cada uma delas. Agora, sabendo, por exemplo, que

$$g'(y) = A^y . \ln A$$

podemos encontrar a derivada da inversa f utilizando o fato de que

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{A^y \cdot \ln A} = \frac{1}{x \ln A}$$

- Exemplo 17:

Consideremos a função $g(y) = \operatorname{sen} y$, que não é inversível em seu domínio.

Considerando a restrição de g ao intervalo $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, podemos definir a função inversa

$$y = g^{-1}(x) = f(x) = \operatorname{arcsen} x$$

(que se lê: "arco-seno x")

$$x = g(y) = \operatorname{sen} y$$

Temos:

$$g'(y) = \cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

Assim:

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

É importante observar que a função arcsen tem como domínio o intervalo fechado $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, mas é derivável somente no intervalo aberto de mesmas extremidades.
Assim,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x) = (\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{para} \quad -1 < x < 1$$

13.8 Diferencial de uma função de uma variável real

Seja $y = f(x)$ uma função da variável independente x. Seja ainda Δx_0 uma quantidade não necessariamente infinitesimal, mas Δx_0 uma quantidade finita.

Considerando

$$\Delta x = \alpha \Delta x_0 \tag{13.32}$$

onde agora α é uma quantidade infinitamente pequena, teremos que a taxa de variação média será dada por:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\alpha\Delta x_0) - f(x)}{\alpha \Delta x_0} \tag{13.33}$$

de onde concluímos que

$$\frac{f(x+\alpha\Delta x_0) - f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x_0 \tag{13.34}$$

Definimos a diferencial da função $y = f(x)$ como:

$$df(x) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x+\alpha\Delta x_0) - f(x)}{\alpha} \tag{13.35}$$

Indicamos, de acordo com a notação acima, essa diferencial com o caractere d. Assim, escrevemos para tal quantidade

$$dy \quad \text{ou} \quad df(x) \tag{13.36}$$

É fácil obter o valor da diferencial se conhecemos a função $y' = f'(x)$. De fato, tomando o limite em ambos os membros da equação **13.33**, encontraremos:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{f\left(x+\alpha\Delta x_0\right)-f\left(x\right)}{\alpha}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}\Delta x_0 \qquad 13.37$$

ou seja,

$$df\left(x\right)=f'\left(x\right)\cdot\Delta x_0 \qquad 13.38$$

No caso particular em que $f(x) = x$, a equação **13.38** se reduz a

$$dx=\Delta x_0 \qquad 13.39$$

Assim, a diferencial da variável independente x nada mais é do que a constante finita Δx_0. Tendo em vista **13.39**, que identifica Δx_0 como a diferencial da função identidade, o lado direito da equação **13.38** pode ser escrito como o produto

$$df\left(x\right)=f'\left(x\right)dx \qquad 13.40$$

ou, analogamente,

$$dy=y'dx \qquad 13.41$$

- Exemplo 18:

Vamos encontrar o valor aproximado de $\ln(1{,}004)$.
Nesse caso, temos a função $y = f(x) = \ln x$, o valor inicial $x = 1$ e o acréscimo $\Delta x = 0{,}004$.
Temos, então, $\Delta y = \ln 1{,}004 - \ln 1 = \ln 1{,}004$
e, como $dy = f'(x).\Delta x$, sendo $f'\left(x\right)=\frac{1}{x}$, para $x = 1$, temos:

$$dy = 0{,}004$$

Logo, Δy pode ser aproximado por $0{,}004$, ou seja,

$$\ln(1{,}004)\cong 0{,}004$$

• Exemplo 19:
Qual o valor aproximado de $\sqrt{4,0024}$?
Agora temos a função $y = f(x) = \sqrt{x}$, o valor inicial $x = 4$ e o acréscimo $\Delta x = 0{,}0024$.
Então, $\Delta y = \sqrt{4,0024} - \sqrt{4} = \sqrt{4,0024} - 2$.
e, como $dy = f'(x).\Delta x$, sendo $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, para $x = 4$, temos:

$$dy = \frac{0,0024}{4} = 0,0006$$

Logo, Δy pode ser aproximado por 2,0006.

Assim, podemos entender a derivada como igual à razão entre a diferencial da função e a diferencial da variável. Por essa razão, frequentemente, chamamos a função derivada de **coeficiente diferencial**. Nesse contexto, **diferenciar** uma função é o mesmo que encontrar sua **diferencial**. A operação pela qual se diferencia é chamada **diferenciação**.

A partir do cálculo das derivadas, podemos obter as diferenciais das funções. Assim, temos as seguintes diferenciais:

$$d(a+x) = dx,\ d(a-x) = -dx,\ d(ax) = adx \tag{13.42}$$

$$d\left(\frac{a}{x}\right) = -a\frac{dx}{x^2}, dx^a = ax^{a-1}dx \tag{13.43}$$

$$d\left(e^x\right) = e^x dx \tag{13.44}$$

$$d(\operatorname{sen} x) = \cos x\ dx = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)dx \tag{13.45}$$

$$d(\cos x) = -\operatorname{sen} x\ dx = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)dx \tag{13.46}$$

Ainda poderíamos, é claro, mostrar que a diferencial da soma de duas funções diferenciáveis é igual à soma das diferenciais dessas funções, bem como que a diferencial do produto $y(x) = u(x).v(x)$ de duas funções diferenciáveis u e v é dada pela relação: $dy = udv + vdu$.

Para verificar essa última afirmação, basta observar que:

$$dy = y' \cdot \Delta x = (u'v + uv')\Delta x = uv'\Delta x + vu'\Delta x = udv + vdu$$

No caso da composição de duas funções:

$$y = f(u),\ u = u(x) \text{ e } y = f(u(x)),$$

temos que, como

$$\frac{dy}{dx}(x) = y'(x) = f'(u)\cdot u'(x) \tag{13.47}$$

então,

$$dy = f'(u)\cdot u'(x)dx \tag{13.48}$$

$$dy = f'(u)du \tag{13.49}$$

o que significa que a diferencial de uma função composta é expressa da mesma maneira como se a variável intermediária u fosse uma variável independente.

- Exemplo 20:

Seja $y = \ln\sqrt{x}$ e vamos determinar sua diferencial dy.
Temos:

$$y = f(u) = \ln u \text{ e } u = u(x) = \sqrt{x}$$

Então, $y'(x) = f'(u)\cdot u'(x) = \frac{1}{u}u'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Logo,

$$dy = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \text{ ou } dy = \frac{1}{\sqrt{x}}d\left(\sqrt{x}\right)$$

- Exemplo 21:

No caso de $y = \cos x^2$, vamos determinar sua diferencial.
De modo análogo, temos:

$$y = f(u) = \cos u \text{ e } u = u(x) = x^2$$

Então, $y'(x) = f'(u)\cdot u'(x) = -\operatorname{sen} u\cdot u'(x) = -\operatorname{sen} x^2\cdot 2x$.
Logo,

$$dy = -\operatorname{sen} x^2\cdot 2xdx = -\operatorname{sen} x^2\cdot d\left(x^2\right)$$

13.9 As regras de L'Hospital

Veremos aqui duas propriedades importantes para o cálculo de limites da forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, que são ambas expressões indeterminadas. Muitas vezes, sabemos calcular limites desse tipo, utilizando alguma técnica apropriada, como a fatoração do denominador e do numerador, seguida da simplificação dos dois termos, ou a multiplicação de ambos os termos por algum fator adequado, e assim por diante. Entretanto, há situações em que tais técnicas não resolvem o problema. É o caso, por exemplo, dos limites: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$ ou $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^{10}}$.

Primeira regra de L'Hospital: Sejam f e g deriváveis num intervalo aberto I e seja a um ponto de I e suponhamos que $g'(x)\neq 0$ numa vizinhança de a, contida em I. Nessas condições, se $\lim_{x\to a} f(x)=0$ e $\lim_{x\to a} g(x)=0$ e se existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, sendo finito ou infinito, então, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ existirá e

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad 13.50$$

É importante notar que a propriedade continua válida se, em lugar de $x\to a$, tivermos $x\to\infty$.

- Exemplo 22:

Seja o limite

$$L_1=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

Observamos que:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x-1)=\cos 0-1=1-1=0$$

$$\lim_{x\to 0}(3x^2)=3(0)^2=0$$

Portanto, temos que L_1 é da forma $\frac{0}{0}$, que é uma indeterminação.
Vejamos, então, se existe o limite:

$$L_2=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)'}{(3x^2)'}$$

Temos:

$$(\cos x - 1)' = -\operatorname{sen} x$$

e

$$\left(3x^2\right)' = 6x$$

Assim:

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)'}{\left(3x^2\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{6x}\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x} = -\frac{1}{6}$$

(atenção para o limite fundamental).
Como L_2 existe, temos $L_1 = L_2$:

$$L_1 = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

- Exemplo 23:

O limite $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$ também é da forma $\dfrac{0}{0}$.

Observamos que $(x-1)' = 1$ e que $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

e que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)'}{(\ln x)'} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1} x = 1$

logo, existe $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$ e $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x} = 1$.

- Exemplo 24:

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\operatorname{sen} x}{(\pi-2x)^2}$ também é da forma $\dfrac{0}{0}$.

Observamos que

$$(\ln\operatorname{sen} x)' = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot\cos x = \operatorname{cotg} x$$

e que

$$[(\pi-2x)^2]' = 2(\pi-2x).(-2) = -4(\pi-2x)$$

e que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\ln\operatorname{sen} x)'}{[(\pi-2x)^2]'} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{cotg} x}{-4(\pi-2x)}$ ainda é da forma $\dfrac{0}{0}$.

Mas, aplicando novamente a propriedade, temos:

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\operatorname{cossec}^2 x$$

e

$$[-4(\pi - 2x)]' = 8$$

e

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{cotg} x)'}{[-4(\pi-2x)]'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\operatorname{cossec}^2 x}{8} = -\frac{1}{8}$$

Logo, existe

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\ln \operatorname{sen} x)'}{[(\pi-2x)^2]'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{cotg} x}{-4(\pi-2x)} = -\frac{1}{8}$$

e existe $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \operatorname{sen} x}{(\pi-2x)^2}$ e $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \operatorname{sen} x}{(\pi-2x)^2} = -\dfrac{1}{8}$.

Segunda regra de L'Hospital: Sejam f e g deriváveis num intervalo aberto I e seja a um ponto de I e suponhamos que $g'(x) \neq 0$ numa vizinhança de a, contida em I. Nessas condições, se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ e se existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, sendo finito ou infinito, então, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existirá e

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad 13.51$$

É importante notar que a propriedade continua válida se, em lugar de $x \to a$, tivermos $x \to \infty$.

• Exemplo 25:

Vejamos o limite: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln \operatorname{tg} 3x}{\ln \operatorname{tg} 5x}$ que é da forma $\dfrac{-\infty}{-\infty}$.

Observamos que

$$(\ln \operatorname{tg} 3x)' = 3\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} 3x}\cdot \sec^2 3x = 3\cdot\frac{1}{\operatorname{sen} 3x.\cos 3x}$$

e que

$$(\ln \operatorname{tg} 5x)' = 5\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} 5x}\cdot \sec^2 5x = 5\cdot\frac{1}{\operatorname{sen} 5x.\cos 5x}$$

e que

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln \operatorname{tg} 3x)'}{(\ln \operatorname{tg} 5x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3}{\operatorname{sen} 3x.\cos 3x}}{\dfrac{5}{\operatorname{sen} 5x.\cos 5x}} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{3}{5}\cdot\frac{\operatorname{sen} 5x.\cos 5x}{\operatorname{sen} 3x.\cos 3x}\right] = 1$$

pois $\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 3x}\right] = \dfrac{5}{3}$ (verifique!). Logo, existe $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln \operatorname{tg} 3x}{\ln \operatorname{tg} 5x}$ e $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln \operatorname{tg} 3x}{\ln \operatorname{tg} 5x} = 1$.

• Exemplo 26:

O limite $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^{10}}$ também é da forma $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

Observamos que

$$(e^x)' = e^x$$

e que

$$(x^{10})' = 10.x^9$$

e que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^{10})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{10x^9}$$

ainda é da forma $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Aplicando a regra de L'Hospital mais 9 vezes, chegaremos a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{10!} = +\infty$$

Logo, existe $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^{10}}$ e $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^{10}} = +\infty$.

Uma observação adicional: é importante saber que as regras de L'Hospital são úteis no sentido de que resolvem vários limites que satisfazem as hipóteses colocadas. Existe, porém, um "mas"...Vejamos a seguir!

- Exemplo 27:

O limite $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\sec x}$ é da forma $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Observamos que

$$(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$$

e que

$$(\sec x)' = \operatorname{tg}.\sec x$$

e que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{tg} x)'}{(\sec x)'} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{\operatorname{tg} x}$ ainda é da forma $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Entretanto, não adianta aplicar novamente a regra de L'Hospital...

Agora, esse limite é quase imediato, ao ser calculado diretamente!

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\sec x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{1} \right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x = 1$$