# 14 O TEOREMA DO VALOR MÉDIO E APLICAÇÕES DAS DERIVADAS

Gil da Costa Marques

# 14.1 Introdução

Na formulação newtoniana, as primeiras aplicações do cálculo diferencial eram voltadas para a dinâmica. O problema de encontrar as tangentes das curvas se revestia de uma grande relevância naquela época, e se transformou rapidamente numa importante aplicação do cálculo. Hoje em dia, são muitas as aplicações do cálculo diferencial nas ciências, nas áreas tecnológicas e em outras áreas do conhecimento. Podemos citar a cinética química, a física, a meteorologia, a economia e a geometria, entre outras.

Em textos anteriores, quando foram introduzidas as primeiras ideias a respeito da derivada de uma função de uma variável real, já foram apresentadas algumas aplicações do cálculo diferencial, especificamente no que diz respeito à taxa de variação de uma grandeza em relação a outra, bem como ao considerar a reta tangente num ponto de uma curva, que é o gráfico de uma função.

Antes de apresentar outras aplicações, vamos introduzir um importante teorema do cálculo diferencial, que é o **Teorema do Valor Médio** e que permitirá entender o comportamento de uma função que é derivável e, portanto, contínua em seu domínio.

# 14.2 O crescimento/decrescimento de uma função num intervalo e os pontos de extremo

Em primeiro lugar, vamos retomar os conceitos de função estritamente crescente ou estritamente decrescente num intervalo a fim de fixar tal nomenclatura.

**Definição:** Uma função $f$ é dita estritamente crescente num intervalo $I$ quando, para quaisquer $x_1$ e $x_2$, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$.

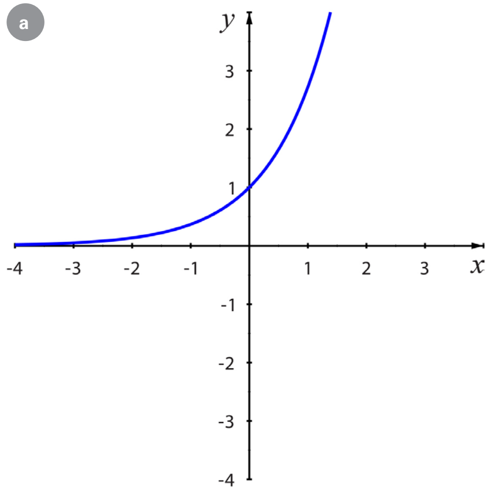



**Gráfico 14.1: a)** A função exponencial $f(x) = e^x$ é uma função estritamente crescente em seu domínio, bem como **b)** a função logarítmica $g(x) = \ln x$ também é estritamente crescente em seu domínio.

Analogamente, temos:

**Definição:** Uma função $f$ é dita estritamente decrescente num intervalo $I$ quando, para quaisquer $x_1$ e $x_2$, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$.

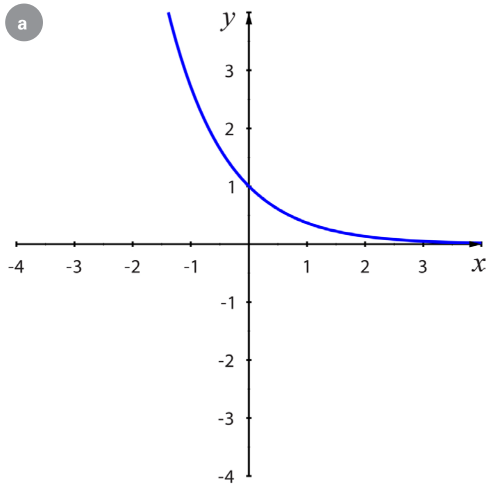



**Gráfico 14.2: a)** A função exponencial $f(x) = e^{-x}$ é uma função estritamente decrescente em seu domínio, bem como **b)** a função logarítmica $g(x) = \ln(-x)$ também é estritamente decrescente em seu domínio.

Uma função pode ser estritamente crescente num intervalo e estritamente decrescente em outro, como é o caso, por exemplo, das funções trigonométricas $y = \text{sen}\, x$ ou $y = \cos x$.

Outro conceito importante no estudo da variação de uma grandeza é o de ponto de extremo num intervalo contido no domínio.

**Definição:** Seja $I$ um intervalo aberto, tal que $I \subset \text{Dom}\, f$, e seja $x_0 \in I$. Dizemos que $x_0$ é um ponto de máximo local para $f$ quando existe uma vizinhança $V$ de $x_0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x$ em $V$. Analogamente, $x_0$ é um ponto de mínimo local para $f$ quando existe uma vizinhança $V$ de $x_0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$, para todo $x$ em $V$.

Vale observar que nem sempre existe algum ponto de máximo ou de mínimo e, quando existe, não necessariamente é único. As funções dos **Gráficos 14.1 e 14.2** não têm ponto de máximo ou de mínimo. As funções trigonométricas $y = \text{sen}\, x$ ou $y = \cos x$ possuem infinitos pontos de máximo e infinitos pontos de mínimo.

O ponto $x_0$ é um ponto de máximo global quando $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x$ pertencente ao domínio da função. Analogamente, o ponto $x_0$ é um ponto de mínimo global quando $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x$ do domínio.

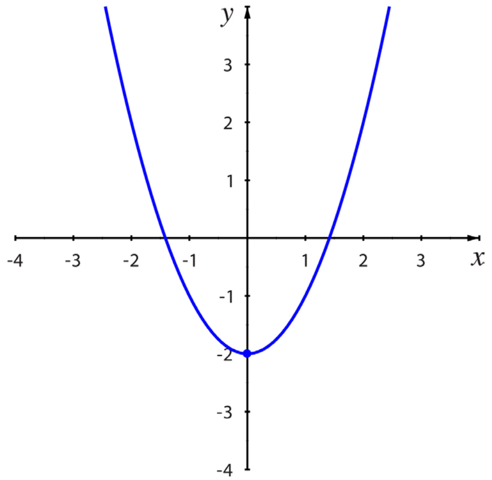



**Gráfico 14.3:** A função $f(x) = x^2 - 2$ possui um ponto de mínimo local em seu domínio, que é o ponto (0, −2) e esse ponto é também o ponto de mínimo global.

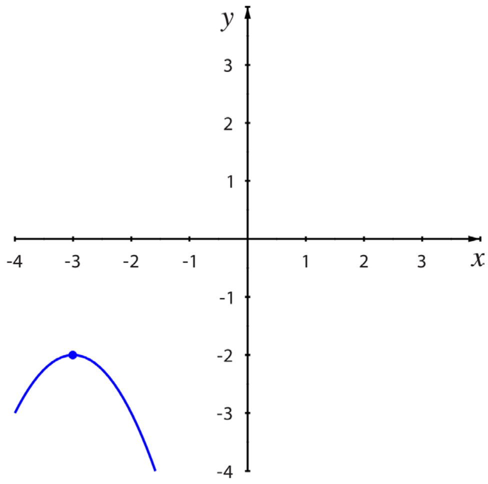



**Gráfico 14.4:** O ponto (−3, −2) é um ponto de máximo local para $f(x) = -(x+3)^2 - 2$ e esse ponto é também o ponto de máximo global.

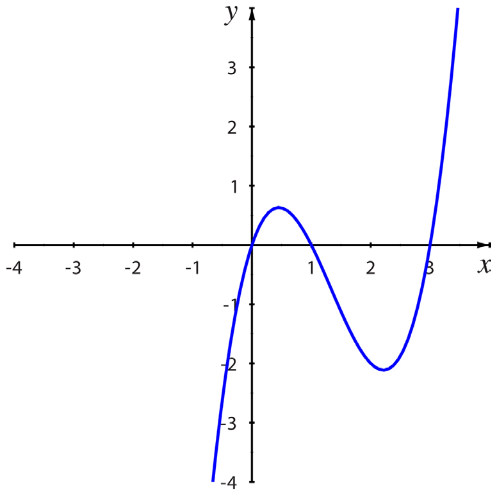



**Gráfico 14.5:** A função $f(x) = x(x - 1)(x - 3)$ possui um ponto de máximo local no intervalo [0, 1] e um ponto de mínimo local no intervalo [1, 3]. Não tem ponto de máximo global, nem ponto de mínimo global.

Temos ainda a seguinte propriedade: sendo $f$ uma função contínua com um máximo ou um mínimo local num ponto $x_0$, no qual $f$ é derivável, então, $f'(x_0) = 0$, isto é, $x_0$ é um ponto crítico para $f$, ou seja, a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ é horizontal.

Convém observar, porém, que o fato de a derivada ser nula num ponto não garante que esse ponto seja um ponto de extremo. É o caso da função $f(x) = x^3$, por exemplo, cuja derivada se anula na origem, mas esse ponto não é nem de máximo nem de mínimo.

## 14.3 A concavidade do gráfico de uma função num intervalo contido em seu domínio e os pontos de inflexão

A fim de introduzir o conceito de concavidade do gráfico de uma função, consideremos $f$ uma função derivável num intervalo aberto e seja $x_0$ um ponto desse intervalo. Lembramos que a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ tem a seguinte equação:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Isso significa que a reta tangente pode ser vista como o gráfico de uma função polinomial de primeiro grau $T$, assim definida:

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Definição: Dizemos que o gráfico de $f$ tem concavidade para cima no intervalo aberto $I$ quando $f(x) > T(x)$ para todos $x$ e $x_0$ em $I$, sendo $x \neq x_0$.

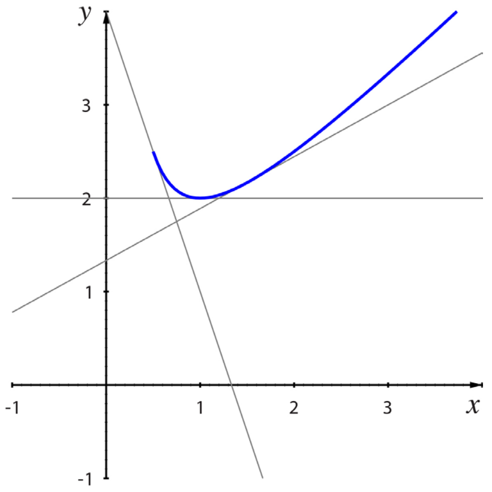



**Gráfico 14.6:** O gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x} + x$, no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 5\right]$, apresenta concavidade voltada para cima.

Definição: Dizemos que o gráfico de $f$ tem concavidade para baixo no intervalo aberto $I$ quando $f(x) < T(x)$ para todos $x$ e $x_0$ em $I$, sendo $x \neq x_0$.

Observação análoga à de cima.

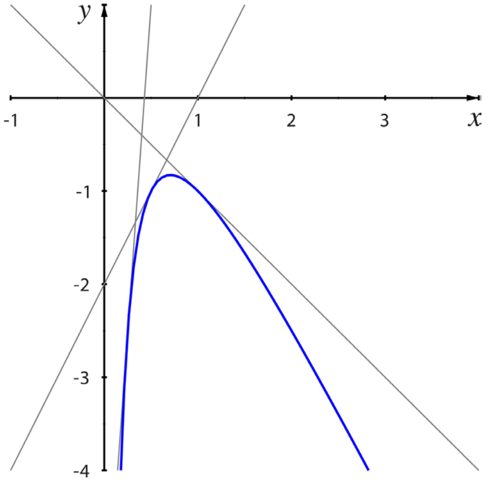



**Gráfico 14.7:** O gráfico da função $g(x) = -\frac{1}{x} - 2x + 2$, no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 5\right]$, apresenta concavidade voltada para baixo.

Evidentemente, o gráfico de uma função pode apresentar concavidade para baixo em algum intervalo do domínio e concavidade para cima em outro intervalo, havendo, portanto, um ou mais pontos de mudança de concavidade.

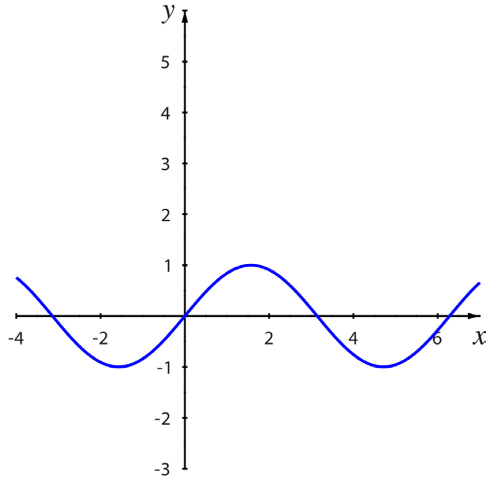
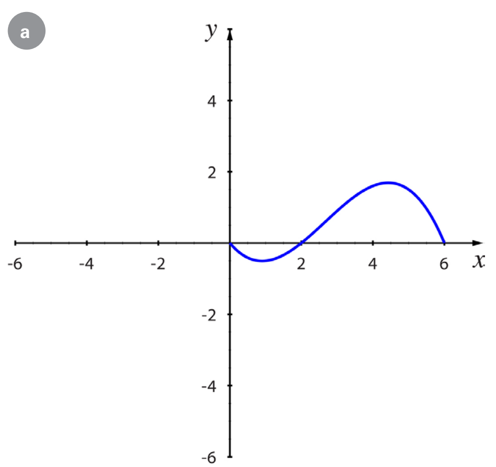



**Gráfico 14.8:** No gráfico de $y = \operatorname{sen} x$, podemos observar que, nos intervalos do tipo $[2k\pi, (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, a concavidade do gráfico é para baixo, ao passo que, nos intervalos do tipo $[(2k+1)\pi, 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, a concavidade do gráfico é para cima.

**Definição:** Seja $f$ uma função contínua e $x_0$ um ponto do domínio. O ponto $x_0$ é denominado um ponto de inflexão de $f$ quando nele ocorre mudança de concavidade do gráfico.



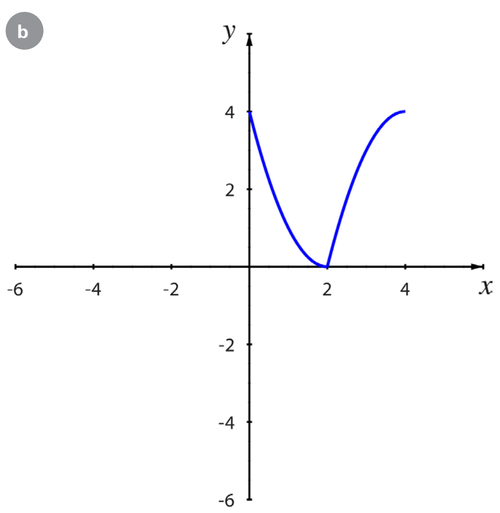




**Gráfico 14.9: a)** O gráfico da função $f(x) = -\frac{1}{10}x(x-2)(x-6)$, definida no intervalo [0, 6], possui um ponto de inflexão em $x = 8/3$;

**b)** o gráfico da função $g(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & \text{se } 0 \le x \le 2 \\ 4-(x-4)^2 & \text{se } 2 < x \le 4 \end{cases}$, definida no intervalo [0, 4], também possui um ponto de inflexão em $x = 2$.

Numa linguagem mais simples, podemos dizer que:

- Se o gráfico de uma função $f$ se situar acima das retas tangentes, cada uma traçada em um ponto da curva num intervalo $I$, para todo ponto de $I$, dizemos que sua concavidade é positiva ou que a curva é côncava nesse intervalo, ou ainda que ela é côncava para cima em $I$.
- Se, por outro lado, a curva estiver sempre abaixo das retas tangentes, cada uma traçada em um ponto da curva no intervalo considerado, para todo ponto pertencente a esse intervalo, dizemos que a concavidade da curva é negativa, ou que, nesse intervalo, ela é convexa, ou ainda que ela é côncava para baixo em $I$.

## 14.4 O Teorema do Valor Médio

O Teorema do Valor Médio (**TVM**), como já foi anunciado, é de grande importância no Cálculo Diferencial e permitirá que se relacione o sinal da derivada de uma função com seu crescimento ou decrescimento em determinado intervalo, bem como que se relacione o sinal da derivada segunda com a concavidade do gráfico da função.

### Teorema

Se $f$ é uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto $]a, b[$, então existe $c$ pertencente a $]a, b[$ tal que a reta tangente ao gráfico de $f$ traçada pelo ponto $(c, f(c))$ é paralela à reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, isto é, $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em textos específicos de Cálculo e não será apresentada aqui. Entretanto, é conveniente observar no **Gráfico 14.10** uma situação em que se aplica o **TVM**. A função considerada é $f(x) = x(x + 2)(x - 3)$ no intervalo $[-3, 4]$. Observamos que a reta que passa pelos pontos $(-3, -18)$ e $(4, 24)$, extremidades do gráfico de $f$, é a reta de equação $y = 6x$. (Verifique!)

Uma vez que $f'(x) = 3x^2 - 2x - 6$, podemos determinar os pontos do gráfico de $f$ em que a reta tangente tem coeficiente angular 6, isto é, é paralela à reta $y = 6x$.

Efetuando $3x^2 - 2x - 6 = 6$, encontramos:

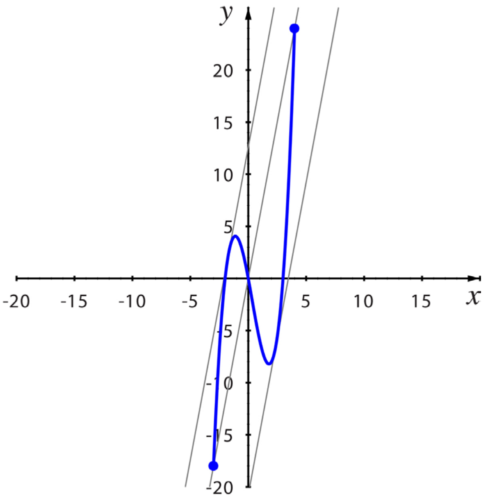



**Gráfico 14.10:** O gráfico da função $f(x) = x(x + 2)(x - 3)$ no intervalo $[-3, 4]$.

$$x = \frac{1+\sqrt{37}}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1-\sqrt{37}}{3}$$

que são os possíveis valores de $c$ mencionado no **TVM**, pertencentes ao intervalo $]-3, 4[$. Sendo assim, a reta tangente ao gráfico de $f$ que passa pelo ponto $\left(\frac{1+\sqrt{37}}{3}, f\left(\frac{1+\sqrt{37}}{3}\right)\right)$ é paralela à reta tangente ao gráfico de $f$ que passa pelo ponto $\left(\frac{1-\sqrt{37}}{3}, f\left(\frac{1-\sqrt{37}}{3}\right)\right)$ e ambas têm coeficiente angular igual a 6.

> É importante observar que o TVM não garante a unicidade do ponto $c$, mas apenas a existência. No caso da função apresentada no **Gráfico 14.10**, foram dois desses pontos.

Observemos agora uma primeira consequência do **TVM**, que relaciona o sinal da primeira derivada da função com o seu crescimento/decrescimento.

**1.** Seja $f$ uma função contínua num intervalo $I$, derivável no interior de $I$:

- **a.** Se $f'(x) > 0$ para todo $x$ interior a $I$, então, $f$ será estritamente crescente em $I$.
- **b.** Se $f'(x) < 0$ para todo $x$ interior a $I$, então, $f$ será estritamente decrescente em $I$.

**a.** De fato, basta verificar que, quaisquer que sejam $x_1$ e $x_2$ em $I$, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$.

Como $f$ é contínua em $I$ e derivável no interior de $I$, pelo TVM, existe $c \in\ ]x_1, x_2[$ tal que $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Logo, como $f'(c) > 0$, temos: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ e, como $x_1 < x_2$, temos $x_2 - x_1 > 0$ e, portanto, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, isto é $f(x_2) > f(x_1)$.

**b.** A argumentação, nesse caso, é análoga.

## Exemplos

- Exemplo 1:

Vamos encontrar os intervalos de crescimento/decrescimento da função:

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{1 - 2x^2}$$

→ Resolução:

Em primeiro lugar, $\mathrm{Dom} f = \left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[ \cup \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[ \cup \left]\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$.

Vamos determinar a derivada de $f$ e estudar o seu sinal.

Temos:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(1-2x^2) - (x^2 + x)(-4x)}{(1-2x^2)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 1}{(1-2x^2)^2}$$

Uma vez que o denominador é sempre positivo, o sinal de $f'$ depende apenas do sinal do numerador. Como o trinômio do numerador também é sempre positivo (verifique!), o sinal de $f'$ é sempre positivo em todo o domínio.

Logo, a função $f$ é estritamente crescente em cada subintervalo do domínio. Uma observação importante é a de não podemos simplesmente afirmar que a função é estritamente crescente, pois isso é falso!

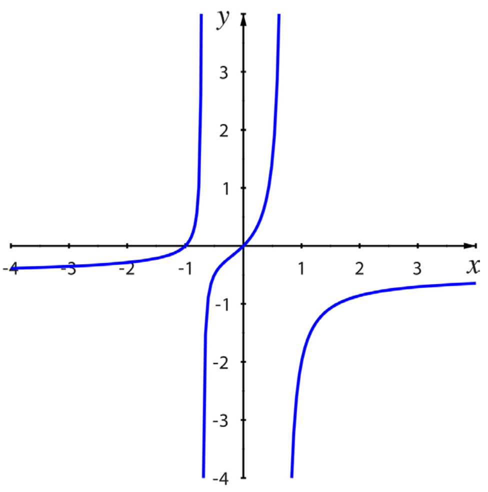



**Gráfico 14.11:** O gráfico de $f(x) = \frac{x^2 + x}{1 - 2x^2}$.

- Exemplo 2:

Vamos encontrar os intervalos de crescimento/decrescimento da função:

$$f(x)=\frac{x}{e^x}$$

→ Resolução:

O domínio da função é: $\text{Dom} f = \mathbb{R}$, pois o denominador nunca se anula.

Como

$$f'(x)=\frac{e^x - x\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x(1-x)}{e^{2x}}=\frac{(1-x)}{e^x}$$

observamos que o denominador nunca se anula e o sinal de $f'$ depende apenas do sinal do numerador.

Uma vez que $f'(x) = 0$ para $x = 1$, temos:

- para $x < 1, f'(x) > 0$; logo, $f$ é estritamente crescente nesse intervalo;
- e para $x > 1, f'(x) < 0$; logo, $f$ é estritamente decrescente nesse intervalo.

Consequentemente, $x = 1$ é um ponto de máximo local para $f$, que também é global.

Podemos observar esses fatos no gráfico de $f$:

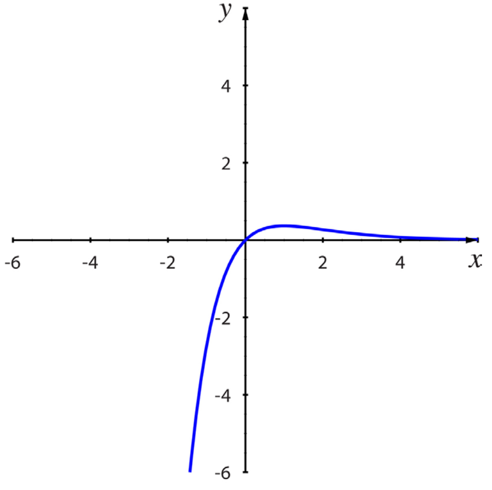



**Gráfico 14.12:** O gráfico de $f(x)=\frac{x}{e^x}$.

Uma segunda consequência do **TVM** relaciona o sinal da segunda derivada da função com a concavidade de seu gráfico.

**2.** Seja $f$ uma função derivável pelo menos até segunda ordem num intervalo aberto $I$.

**a.** Se $f''(x) > 0$ em $I$, então, o gráfico de $f$ terá concavidade para cima em $I$.

**b.** Se $f''(x) < 0$ em $I$, então, o gráfico de $f$ terá concavidade para baixo em $I$.

**a.** De fato, basta verificar que, quaisquer que sejam $x_1$ e $x_2$ em $I$, com $x_1 < x_2$, temos $f'(x_1) < f'(x_2)$ e, portanto, a concavidade do gráfico é para cima.

Como $f'$ é contínua em $I$ e derivável no interior de $I$, pelo TVM, existe $c \in \,]x_1, x_2[$ tal que $f''(c) = \dfrac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1}$. Logo, como $f''(c) > 0$, temos: $\dfrac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ e, como $x_1 < x_2$, temos $x_2 - x_1 > 0$ e, portanto, $f'(x_2) - f'(x_1) > 0$, isto é, $f'(x_2) > f'(x_1)$.

**b.** A argumentação, nesse caso, é análoga.

- Exemplo 3:

Vamos estudar a concavidade do gráfico de $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$.

Já vimos que o domínio da função é: Dom $f = \mathbb{R}$, pois o denominador nunca se anula.

Como

$$f'(x) = \frac{e^x - x.e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{(1-x)}{e^x}$$

temos que a derivada segunda de $f$ é dada por:

$$f''(x) = \frac{-e^x - (1-x)e^x}{e^{2x}} = \frac{-2e^x + x.e^x}{e^{2x}} = \frac{(x-2)}{e^x}$$

Observamos que o denominador nunca se anula e o sinal de $f''$ depende apenas do sinal do numerador. Uma vez que $f''(x) = 0$ para $x = 2$, temos:

- para $x < 2$, $f''(x) < 0$; logo, $f'$ é estritamente decrescente nesse intervalo e a concavidade do gráfico é voltada para baixo;
- e para $x > 2$, $f''(x) > 0$; logo, $f'$ é estritamente crescente nesse intervalo e a concavidade do gráfico é voltada para cima.

Consequentemente, $x = 2$ é um ponto de inflexão para $f$, pois nele ocorre mudança de concavidade no gráfico.

Podemos observar tais fatos no gráfico de $f$ (**Gráfico 14.12**).

## 14.5 Determinação dos pontos de máximo, mínimo e de inflexão

Como vimos, nos pontos de máximo ou de mínimo locais, a taxa de variação pontual, ou instantânea quando for o caso, se anula. Assim, nesses casos, para o valor $x_0$ da variável independente, a derivada da função $f(x)$ se anula:

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = 0$$

ou seja, tais pontos são pontos críticos para a função $f$.

A partir de tudo o que foi desenvolvido neste texto, para decidir de que tipo é o ponto crítico, podemos recorrer à análise da derivada segunda calculada em $x = x_0$.

Considerando-se, pois, o sinal da derivada segunda nesse ponto, temos as possibilidades:

**a.** Se a derivada segunda no ponto for positiva, isto é, se:

$$\left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} = f''(x_0) > 0,$$

então, o ponto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$ é um mínimo local da função $f(x)$.

**b.** No caso em que a derivada segunda da função no ponto for negativa, isto é, se:

$$\left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} = f''(x_0) < 0$$

então, o ponto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$ é um máximo local da função $f(x)$.

Agora, se $x = x_0$ for um ponto crítico e também for um ponto de inflexão, temos:

$$\left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} = f''(x_0) = 0$$

Essa condição, porém, não é suficiente, pois, por exemplo, no caso de

$$f(x) = x^4$$

temos

$$f'(x) = 4x^3$$

e, portanto $x = 0$ é ponto crítico da $f$.

Temos também

$$f''(x) = 12x^2$$

que se anula em $x = 0$, mas $(0, f(0)) = (0, 0)$ não é ponto de inflexão.

## 14.6 Um estudo de caso: o gráfico de uma função

Todos os conceitos que foram apresentados e os resultados que foram construídos nos permitem estudar o comportamento de uma função em seu domínio e elaborar o seu gráfico. Vamos fazer isso para o caso da função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

**i.** Domínio

Nesse caso, temos $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}^*_+$

**ii.** Intersecções com os eixos

Como $x > 0$, não há intersecção com o eixo $y$.

Por outro lado, $y = 0 \Leftrightarrow x = 1$; portanto, o gráfico intercepta o eixo $x$ no ponto $x = 1$.

**iii.** A primeira derivada

Como $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, temos $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ e $\text{Dom}\, f' = \mathbb{R}^*_+$.

**iv.** Pontos críticos da função, ou seja, pontos que anulam a primeira derivada

Temos: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$.

Logo, no ponto $(e, f(e)) = \left(e, \dfrac{1}{e}\right)$ a reta tangente ao gráfico é horizontal.

**v.** Estudo do sinal da primeira derivada

- $0 < x < e$: $f'(x) > 0$ e, portanto, $f$ é estritamente crescente
- $x > e$: $f'(x) < 0$ e, portanto, $f$ é estritamente decrescente

Logo, $x = e$ é um ponto de máximo local e, como é o único ponto critico, é também o ponto de máximo global.

**vi.** A segunda derivada

Como $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$, temos $f''(x) = \dfrac{-3+2\ln x}{x^3}$ e $\text{Dom} f'' = \mathbb{R}^*_+$.

**vii.** Pontos que anulam a segunda derivada ou pontos críticos da primeira derivada

Temos: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3+2\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{3/2}$.

**viii.** Estudo do sinal da segunda derivada

- $0 < x < e^{3/2}$: $f''(x) < 0$ e, portanto, $f'$ é estritamente decrescente e $f$ é côncava para baixo
- $x > e^{3/2}$: $f''(x) > 0$ e, portanto, $f'$ é estritamente crescente e $f$ é côncava para cima

Logo, $x = e^{3/2}$ é um ponto de inflexão, pois nele ocorre mudança de concavidade. Temos que

$$f\left(e^{3/2}\right) = \frac{3}{2}e^{-3/2}$$

**ix.** Limites nas extremidades dos intervalos que constituem o domínio da função

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$, uma vez que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1/x}{1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, pois, no limite inicial, o numerador e o denominador

tendem a $+\infty$, sendo então possível aplicar L'Hospital.

**x.** O gráfico de $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Colocando todas as informações coletadas num sistema cartesiano, temos finalmente o **Gráfico 14.13**.

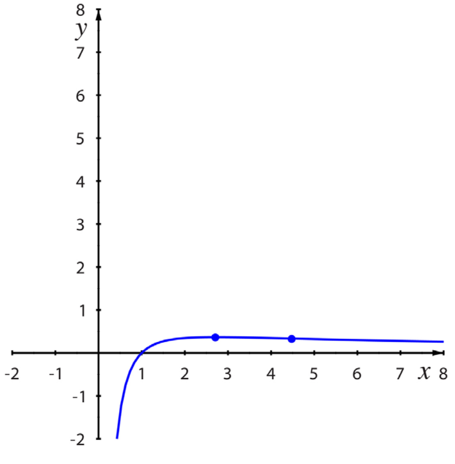



**Gráfico 14.13:** O gráfico da função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ no qual podemos observar o ponto $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$, que é o ponto de máximo global, e o ponto de inflexão: $\left(e^{3/2}, \dfrac{3}{2}e^{-3/2}\right)$.

A seguir, vamos apresentar aplicações do Cálculo Diferencial nas ciências. Algumas já foram vistas no decorrer do desenvolvimento em textos anteriores e serão apenas retomadas; outras ampliam o contexto considerado, mostrando a potência do Cálculo.

# 14.7 Taxa de variação média e instantânea

Se uma grandeza física variar com o tempo, podemos definir duas taxas de variação: a média e a instantânea. Para entender isso, consideremos a taxa de variação de um índice como o Índice Bovespa. Representaremos tal índice pela letra $I$.

Num dia típico, o índice Bovespa pode variar aproximadamente de acordo com o gráfico da **Figura 14.1**.

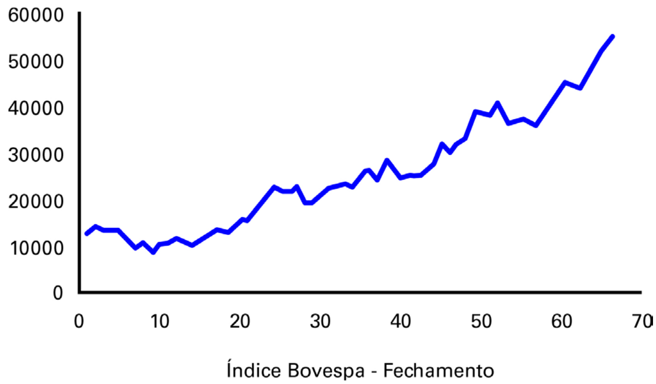



**Figura 14.1:** Exemplo da variação do índice Bovespa.

Podemos estar interessados na taxa de variação entre dois instantes de tempo. Assim, imaginemos que, no instante de tempo $t_1$, o índice seja $I_1$, ou seja, $I_1 = I(t_1)$. Imaginemos que no instante $t_2$, admitido posterior a $t_1$, o índice seja $I_2$, onde $I_2 = I(t_2)$. Assim, no **intervalo de tempo** $\Delta \boldsymbol{t}$, dado por $\Delta t = t_2 - t_1$, houve uma **variação do Índice Bovespa** dado por $\Delta I = I(t_2) - I(t_1)$.

Definimos a **taxa de variação média** como o quociente entre a variação do índice $\Delta I$ e o intervalo de tempo decorrido $\Delta t$:

$$\text{taxa de variação média} = \frac{\Delta I}{\Delta t} \tag{14.1}$$

No entanto, muitas vezes, para fins de tomada de posição em relação a comprar ou vender ações, é mais importante saber a taxa de variação num determinado instante de tempo. Tal grandeza recebe o nome de **taxa de variação instantânea**. Para defini-la, introduzimos um conceito muito importante na matemática, que é o conceito de limite.

Observemos primeiramente que a taxa de variação média é definida tomando-se dois instantes de tempo. A taxa de variação instantânea deverá ser definida num determinado instante de tempo. Assim, para defini-la, recorremos ao artifício de tomarmos intervalos de tempo $\Delta t$ cada vez menores. Portanto, estaremos falando, ao tomar o limite no qual o intervalo de tempo $\Delta t$ tende a zero, de um só instante de tempo. Definimos, portanto, a taxa de variação instantânea através do processo limite:

$$\text{taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta t} \qquad 14.2$$

- Exemplo 4:

Um tanque tem 500 litros de água; por meio de uma torneira mal fechada, a água começa a escoar. O **Gráfico 14.14** ilustra a variação do volume de água com o tempo.

**a.** Calcule a taxa de variação média do volume no intervalo $\Delta t$ compreendido desde $t = 0$ até $t = 10$ min.

**b.** Idem, para o intervalo $t = 10$ min até $t = 60$ min.

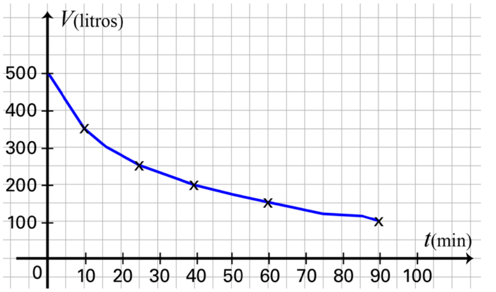



**Gráfico 14.14:** A variação do volume da água no tanque.

→ Resolução:

A taxa de variação média do volume é determinada pela razão entre a variação de volume $\Delta V$ que ocorre num determinado intervalo de tempo $\Delta t$. Vamos denominar essa razão pela letra grega "*fi*" maiúscula; logo: $\Phi_{\text{média}} = \dfrac{\Delta V}{\Delta t}$. A respectiva unidade de medida será: $\text{unid}\left(\Phi_{\text{média}}\right) = \dfrac{\text{Unid}(\Delta V)}{\text{Unid}(\Delta t)}$.

No **SI** (Sistema Internacional de Unidades), $\Delta V$ é expresso em **m³** e $\Delta t$ , em **s**; logo, ($\Phi_{\text{média}}$) será expresso em **m³/s = m³.s⁻¹**. No caso presente, o volume é expresso em **litros** e o intervalo de tempo em **minutos**; nesses termos → Unid($\Phi_{\text{média}}$) = **litros/minuto**. Vamos às respostas:

**a.** $\Phi_{\text{média}} = \dfrac{\Delta V}{\Delta t} = \dfrac{V_{10} - V_0}{t_{10} - t_0} = \dfrac{(350 - 500)\,\text{litros}}{(10 - 0)\,\text{minutos}} = -15\,\text{litros/minuto}$. O sinal negativo significa que o volume de água contido no tanque diminui, em média, à razão de 15 litros por minuto.

**b.** $\Phi_{\text{média}} = \dfrac{\Delta V}{\Delta t} = \dfrac{V_{60} - V_{10}}{t_{60} - t_{10}} = \dfrac{(150 - 350)\,\text{litros}}{(60 - 10)\,\text{minutos}} = -4\ \text{litros/minuto}$

# 14.8 Geometria: a reta tangente a uma curva

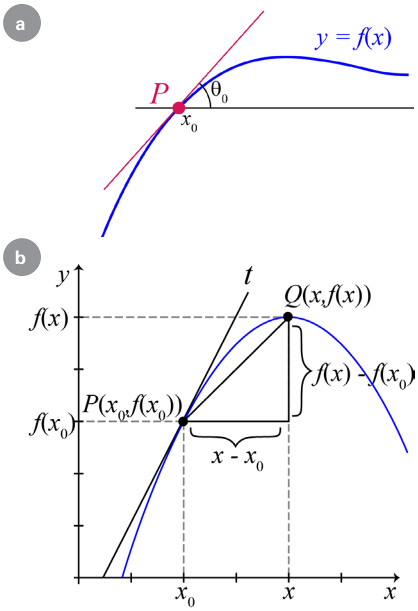



**Gráfico 14.15: (a)** Reta tangente a uma curva; **(b)** A tangente como posição limite das secantes.

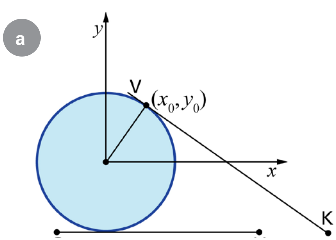
Esse é um problema clássico da geometria. Assim, a busca por encontrar uma forma de se determinar a reta tangente a uma curva num ponto é resolvida com a descoberta do cálculo diferencial.

Se a curva for representada no plano cartesiano pelo gráfico de uma função $y = f(x)$, temos:

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} \tag{14.3}$$

onde $\theta_0$ é o ângulo formado pela reta tangente à curva no ponto cuja abcissa é $x_0$ e o eixo $x$. Por exemplo, se quisermos determinar o coeficiente angular da reta tangente à circunferência de raio $R$ e centro na origem (0,0), num ponto como aquele indicado na **Figura 14.2a**, devemos começar com a função:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \tag{14.4}$$



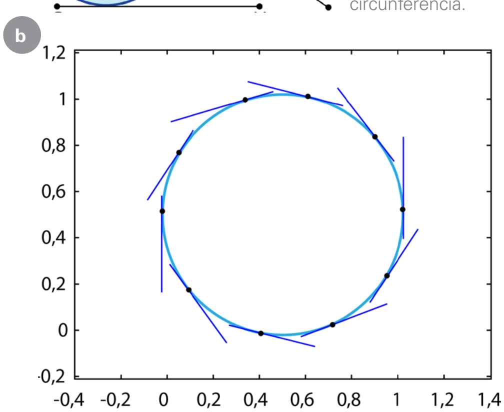




**Figura 14.2:** **(a)** Reta tangente à circunferência num ponto e **(b)** retas tangentes em diferentes pontos de uma circunferência.

que descreve a semicircunferência superior. A derivada da função é dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \tag{14.5}$$

e, portanto, num ponto da circunferência para o qual a coordenada $x = x_0$, a inclinação

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \left.\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right|_{x=x_0} = \frac{-x_0}{\sqrt{R^2 - x_0^{\,2}}}, \tag{14.6}$$

que é o coeficiente angular procurado. Verifique para o caso dos pontos da semicircunferência inferior.

Assim, no caso do ponto de coordenadas

$$(x, y) = \left(\frac{R}{2}, \frac{\sqrt{3}R}{2}\right) \qquad 14.7$$

isto é, quando $x_0 = \dfrac{R}{2}$, o ângulo é dado por:

$$\text{tg } \theta_0 = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta_0 = 150° \qquad 14.8$$

e o coeficiente angular da reta tangente é: $-1/\sqrt{3}$.

- Exemplo 5:

Consideremos o problema de determinação do coeficiente angular da reta tangente por um ponto da curva que é o gráfico de $y = \cos x$.

→ Resolução:

Escrevemos:

$$y(x) = \cos x$$

Nesse caso,

$$\text{tg } \theta_0 = \left.\frac{d\cos(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = -\text{sen } x\big|_{x=x_0} = -\text{sen } x_0$$

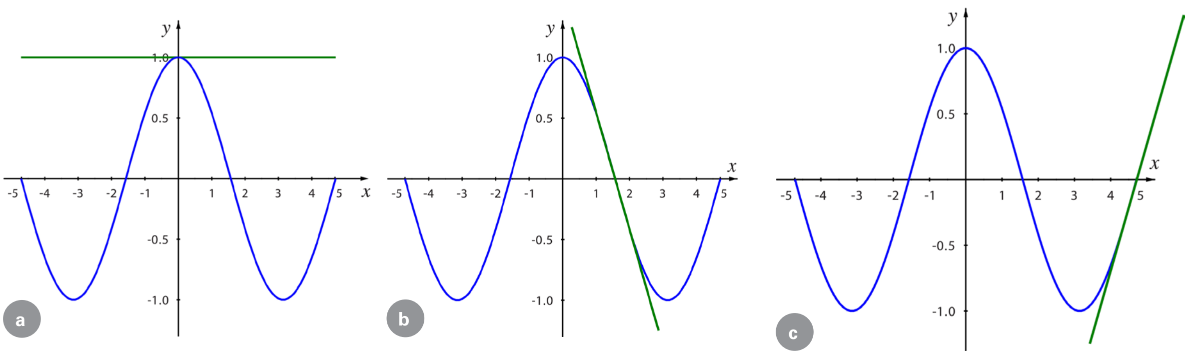



**Gráfico 14.16: a)** reta tangente ao gráfico de $y = \cos x$ no ponto em que $x = 0$ **b)** reta tangente ao gráfico de $y = \cos x$ no ponto em que $x = \pi/2$ **c)** reta tangente ao gráfico de $y = \cos x$ no ponto em que $x = 3\pi/2$.

Assim, no ponto em que $x = 0$, o coeficiente angular à reta tangente ao gráfico de $y = \cos x$ é nulo e o ângulo de inclinação da reta é de 0°. Veja o **Gráfico 14.16a**. No ponto em que $x = \pi/2$:

$$\text{tg}\theta_0 = -1$$

isto é, $\theta_0 = 135°$ (veja **Gráfico 14.16b**). Para $x = (3\pi)/2$, por outro lado, a reta tangente à curva forma um ângulo de 45° com a horizontal (veja **Gráfico 14.16c**).

- Exemplo 6:

Consideremos agora o problema de determinar a tangente à parábola, pelo ponto da curva cuja abscissa é dada por $x = x_0$.

→ Resolução:

Considerando-se a forma mais geral da parábola, temos:

$$\text{tg } \theta_0 = \frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c)\Big|_{x=x_0} = (2ax + b)\Big|_{x=x_0} = (2ax_0 + b)\Big|$$

Por exemplo, no caso da posição dada em metros, dependente do tempo (em segundos) como um polinômio de segundo grau da forma:

$$y(t) = 5t^2 - 10t + 5$$

o gráfico tem uma inclinação que em cada instante de tempo $t = t_0$ varia de acordo com:

$$\text{tg } \theta_0 = 10t_0 - 10$$

Assim, a reta tangente à curva no instante $t = 1$ tem uma inclinação nula (ela é paralela ao eixo dos tempos). Abaixo desse tempo, a inclinação é tal que o ângulo é maior do que 90°. Acima desse tempo, a inclinação assume valores que se aproximam cada vez mais de 90°. Veja o **Gráfico 14.17**.

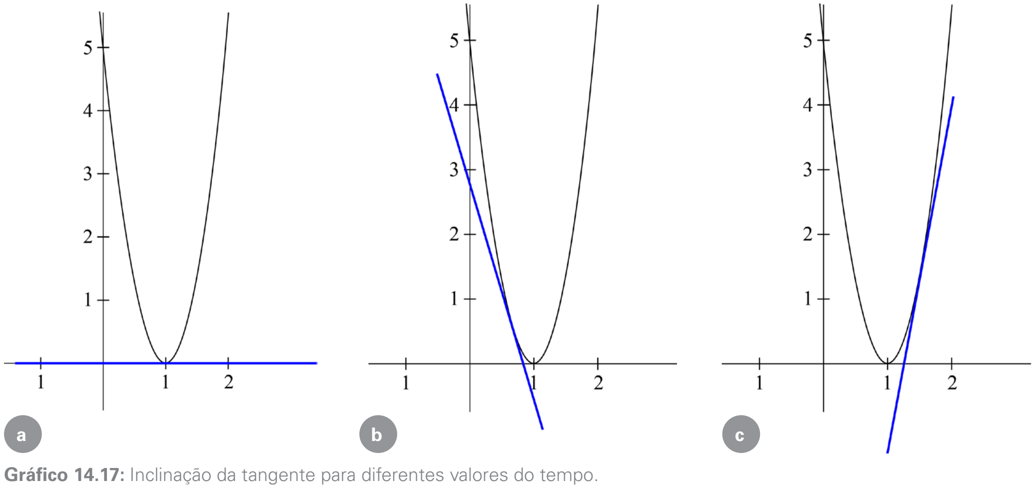



**Gráfico 14.17:** Inclinação da tangente para diferentes valores do tempo.

# 14.9 Determinação dos Pontos de Máximo, Mínimo e de Inflexão

Considere a determinação do ponto de máximo ou de mínimo das funções polinomiais de segundo grau $y(x) = ax^2 + bx + c$ , de onde $y'(x) = 2ax + b$.

Máximo ou mínimo de uma função polinomial do segundo grau ocorre para um valor $x_m$ tal que:

$$2ax_m + b = 0 \qquad 14.9$$

ou seja, para o valor $x_m$ dado por:

$$x_m = -\frac{b}{2a} \qquad 14.10$$

e o valor do máximo, ou mínimo, correspondente será:

$$y_m = -\frac{b^2}{4a} + c \qquad 14.11$$

Assim, o ponto de máximo, ou de mínimo, têm coordenadas dadas por:

$$\left(x_m, y_m\right) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right) \qquad 14.12$$

Por exemplo, os pontos de mínimo das funções quadráticas $y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}$, $y = (x - 1)^2$ e $y = x^2 + 1$, são dados, respectivamente, por $(3/2, 1/8)$; $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

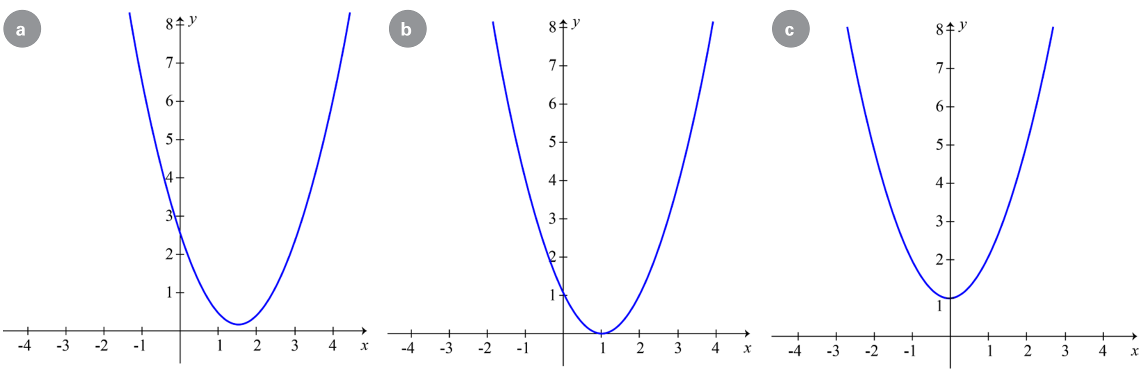



**Gráfico 14.18:** Pontos de mínimo de funções quadráticas.

Temos assim uma forma de determinar os pontos de máximo e mínimo locais do gráfico de um polinômio de grau $n$

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Esses pontos serão designados por

$$(x_m, y_m) \tag{14.13}$$

onde o valor da variável independente $x_m$ é tal que, para um polinômio de grau $n$, satisfaz à equação:

$$n.a_n x_m^{n-1} + (n-1).a_{n-1} x_m^{n-2} + \ldots + 2a_2 x_m + a_1 = 0 \tag{14.14}$$

isto é, $x_m$ é raiz da derivada.

Como vimos, nos pontos de máximo e mínimo, a derivada de uma função polinomial se anula. Escrevemos:

$$\left.\frac{dP_n(x)}{dx}\right|_{x=x_m} = 0 \tag{14.15}$$

O ponto $(x_m, y_m)$ será um ponto de máximo se, numa vizinhança dele, a concavidade do gráfico da função for voltada para baixo, o que, como vimos antes, significa que a derivada segunda da função é negativa, isto é:

$$n(n-1).a_n x_m^{n-2} + (n-1)(n-2).a_{n-1} x_m^{n-3} + \ldots + 2a_2 < 0 \tag{14.16}$$

Se tal expressão for positiva, o ponto será um ponto de mínimo.

Por exemplo, os pontos de máximo ou de mínimo do polinômio cúbico

$$P_3(x) = x^3 + mx - n \tag{14.17}$$

são os pontos para os quais sua derivada se anula:

$$3x_m^{\ 2} + m = 0 \qquad 14.18$$

Essa equação admite duas soluções para $m < 0$, uma solução para $m = 0$, e nenhuma solução para $m > 0$.

Consideremos o caso do polinômio:

$$P_4(x) = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3) = (x^2-4)(x^2-9) \qquad 14.19$$

Sua primeira e segunda derivadas são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \frac{dP_4(x)}{dx} &= 2x(2x^2-13) \\ \frac{d^2P_4(x)}{dx^2} &= 2(2x^2-13) + 2x.4x = 12x^2 - 26 \end{aligned} \qquad 14.20$$

Portanto, os pontos de máximo ou de mínimo são aqueles para os quais:

$$2x_m(2x_m^{\ 2} - 13) = 0 \qquad 14.21$$

Donde concluímos que os valores de $x$ que satisfazem à condição **14.21** são dados por:

$$\begin{cases} x_m = 0 \\ x_m = \pm\sqrt{\dfrac{13}{2}} \end{cases} \qquad 14.22$$

Tendo em vista que

$$\left.\frac{d^2P_4}{dx^2}\right|_{x=0} = 0 - 26 < 0 \qquad 14.23$$

e

$$\left.\frac{d^2P_4}{dx^2}\right|_{x=\pm\sqrt{\frac{13}{2}}} = 12\left(\pm\sqrt{\frac{13}{2}}\right)^2 - 26 = 78 - 26 > 0 \qquad 14.24$$

segue-se que o ponto cuja abscissa é $x_m = 0$ é um ponto de máximo local, ao passo que os pontos de abscissas $x = \pm\sqrt{\dfrac{13}{2}}$ são pontos de mínimos locais.

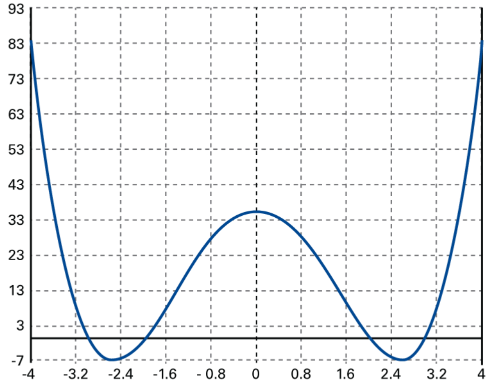



**Gráfico 14.19:** Pontos de máximo e mínimo locais da função **14.19**.

## 14.10 Cinemática: velocidade e aceleração

Algumas funções obtidas por meio da derivada de outras funções recebem nomes especiais. A seguir apresentaremos algumas delas.

### 14.10.1 Velocidade

Muitas vezes referimo-nos a objetos que se movem lentamente e objetos dotados de movimentos rápidos. Os dois conceitos são relativos e se referem à taxa segundo a qual um objeto muda de posição. Como visto antes, a taxa de variação é um conceito utilizado com muita frequência e, por isso, muito importante na Física.

A velocidade é definida como a taxa de variação da posição de um objeto em função do tempo. Se a posição de um objeto mudar com o tempo, ele tem, portanto, uma velocidade. Se ele está em repouso, sua velocidade é nula.

Um dos aspectos mais relevantes a respeito da grandeza física denominada velocidade é o fato de que, quando determinada

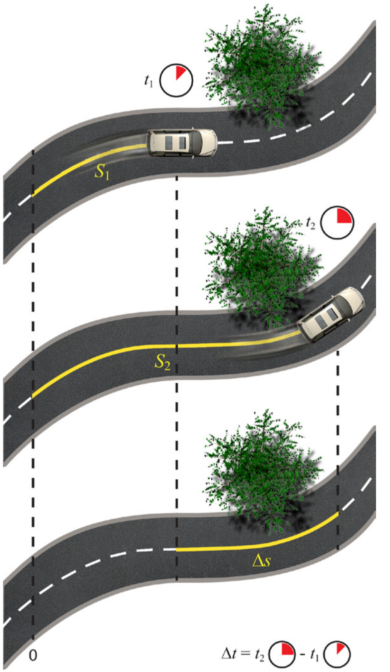



**Figura 14.3:** Variação da posição de um objeto em função do tempo.

de uma forma matematicamente precisa, ela não só indica a taxa segundo a qual a distância percorrida pela partícula varia com o tempo, como também indica a direção (bem como o sentido) que a partícula tomará a seguir.

A caracterização de cada ponto no espaço se dá através das coordenadas do ponto. Portanto, o conceito de velocidade é um pouco mais complexo do que parece à primeira vista. Sua conceituação mais geral requer a análise do movimento no espaço tridimensional.

A velocidade introduzida a partir do conceito de distância percorrida não permite indicar a direção do movimento da partícula. No entanto, ela dá a ideia de rapidez com que se dá o movimento.

## 14.10.2 Velocidade escalar

Analisemos o movimento a partir de uma das suas propriedades, que é a taxa de variação das distâncias percorridas pelo móvel. Quando um objeto se move ao longo de uma curva bem definida, a distância ao longo da curva até a origem varia com o tempo. A essa distância associamos o conceito de variável espaço. Portanto, dizemos que, num movimento, a variável espaço é função do tempo. Escrevemos:

$$s = s(t) \tag{14.25}$$

Digamos que, no instante de tempo $t_1$, a partícula estava em $s_1$ e que, no instante $t_2$, ela está em $s_2$. Admitiremos $t_2 > t_1$ (**Figura 14.3**).

Assim, no **intervalo de tempo Δ*t***, dado por

$$\Delta t = t_2 - t_1 \tag{14.26}$$

houve uma **variação de espaços Δ*s***, dada por

$$\Delta s = s_2 - s_1 \tag{14.27}$$

Definimos a **velocidade escalar média** como o quociente entre a variação de espaço e o intervalo de tempo decorrido:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{14.28}$$

Observe que a velocidade escalar média sempre faz referência a **dois** instantes de tempo (por isso, falamos em média). No entanto, a velocidade na qual temos maior interesse é a velocidade num determinado instante de tempo. Tal velocidade é denominada **velocidade instantânea**.

Para definirmos a **velocidade instantânea**, devemos recorrer a um artifício matemático conhecido como **limite**.

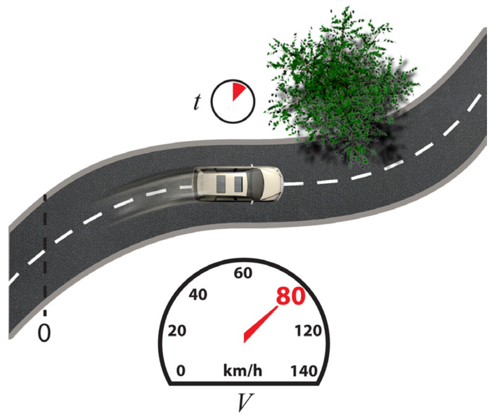



**Figura 14.4:** O velocímetro determina a velocidade instantânea de um móvel.

Observemos primeiramente que a velocidade média é definida tomando-se dois instantes de tempo. Para defini-la num determinado instante, basta tomarmos intervalos de tempo $\Delta t$ cada vez menores. Portanto, ao tomarmos o limite no qual o intervalo de tempo $\Delta t$ tende a zero, estaremos falando de um só instante de tempo.

Definimos, portanto, a velocidade instantânea através do processo limite:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad 14.29$$

Num certo número de casos, é relativamente simples calcular a velocidade instantânea. Queremos determinar a velocidade no instante de tempo $t$. Assim, calculamos a **velocidade média** entre os instantes $t_1 = t$ e $t_2 = t + \Delta t$:

$$v_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \qquad 14.30$$

e depois tomamos o limite quando $\Delta t$ tende a zero:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[ \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \right] \qquad 14.31$$

O processo-limite definido acima tem o nome de **derivada da função *s*(*t*)** com respeito ao tempo e se representa:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[ \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \right] \qquad 14.32$$

Considere o caso de um móvel cuja equação horária dos espaços é dada por:

$$s(t) = 5t^2 - 10t + 8 \tag{14.33}$$

Sua velocidade escalar instantânea é, portanto, dada por:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 10t - 10 \tag{14.34}$$

Considere agora o caso do movimento harmônico simples. De acordo com a definição de tal movimento, ele ocorre sempre que a solução das equações de movimento nos leva ao resultado

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0) \tag{14.35}$$

onde $A$ é a amplitude do movimento, $\theta_0$ é um ângulo denominado fase inicial, e $\omega$ é a frequência angular do mesmo. A velocidade do móvel que executa o movimento harmônico simples é dada por:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A\cos(\omega t + \theta_0)\right) = A(-\omega)\operatorname{sen}(\omega t + \theta_0) \tag{14.36}$$

Obtemos:

$$v(t) = -A\omega\operatorname{sen}(\omega t + \theta_0) \tag{14.37}$$

de onde inferimos que a velocidade atinge um valor máximo dado por $A\omega$ e ela ocorre nos instantes em que o móvel se encontra na origem (os valores de $x = 0$). Ademais, nos pontos para os quais a velocidade se anula, a posição atinge os valores máximos ou mínimos.

## 14.10.3 Aceleração escalar

Se a velocidade de um objeto varia com o tempo, diz-se que ele tem **aceleração**. Se a velocidade é constante (isto é, não varia com o tempo), a sua aceleração é nula.

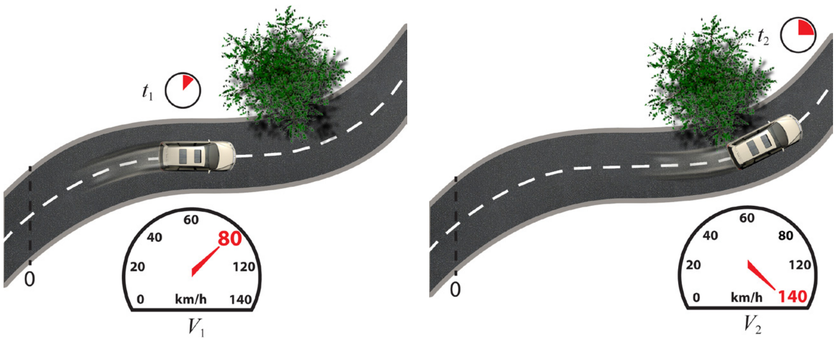



**Figura 14.5:** Variação da velocidade e tempo decorrido.

Supondo que, no instante $t_1$, a partícula tinha velocidade $v_1$ e no instante $t_2$ tenha velocidade $v_2$ (**Figura 14.5**), definimos a **aceleração escalar média** de uma partícula como o quociente entre a variação de velocidade ($\Delta v$) e o intervalo de tempo decorrido ($\Delta t$):

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad 14.38$$

onde $\Delta v$ é a diferença de velocidades da partícula nos instantes $t_2$ e $t_1$, isto é:

$$\Delta v \ = \ v_2 - v_1 \qquad 14.39$$

Mais importante que a aceleração média é a aceleração **instantânea**. Como o nome indica, o interesse é a obtenção da aceleração num determinado instante de tempo. A maneira de defini-la, a partir da aceleração média, é tomar intervalos de tempo cada vez menores, isto é tomar o limite em que o intervalo de tempo se aproxima de zero. Essa é a situação na qual $t_2$ é muito próximo de $t_1$. Definimos, portanto, a aceleração **escalar instantânea** através do processo-limite:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad 14.40$$

A partir da velocidade instantânea $v(t)$, podemos calcular a aceleração instantânea. Primeiramente, calculamos a aceleração média entre os instantes $t$ e $t + \Delta t$:

$$a_m = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \qquad 14.41$$

e, a partir daqui, tomamos o limite quando $\Delta t \to 0$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[ \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \right] \quad 14.42$$

Esse processo-limite define a função de $a(t)$ (com respeito ao tempo) e se representa:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[ \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \right] \quad 14.43$$

No caso do móvel, cuja equação horária dos espaços é dada por **14.33**, e a velocidade dada em **14.34**, sua aceleração escalar instantânea é dada por:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(10t - 10) = 10 \quad 14.44$$

ou seja, sua aceleração é constante.

Retornando ao caso do movimento harmônico simples, vemos que a sua aceleração instantânea é dada por:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-\omega A \text{sen}(\omega t + \theta_0)) = -\omega A(-\omega)\cos(\omega t + \theta_0) \quad 14.45$$

cujo resultado pode ser expresso como:

$$a(t) = A\omega^2 \cos(\omega t + \theta_0) = \omega^2 x(t) \quad 14.46$$

Donde inferimos que a aceleração atinge os valores máximos, dados por $A\omega^2$, os quais ocorrem nos instantes para os quais o móvel se encontra nos pontos mais distantes da origem.

## 14.11 Dinâmica: A Lei de Newton

Na dinâmica, lidamos com duas taxas de variação: uma taxa de variação associada à posição e uma taxa de variação instantânea. De acordo com a lei de Newton, escrevemos:

$$F = ma \quad 14.47$$

onde a força pode depender explicitamente do tempo e implicitamente da posição. Assim, escrevemos no caso de forças que dependem apenas de uma variável:

$$F = F(x) \tag{14.48}$$

Para o caso de forças conservativas (a maioria dos casos), a força é dada como a derivada da energia potencial. Assim, forças como a elétrica e a gravitacional são definidas como taxas de variação instantâneas da energia potencial ($U(x)$). Nesse caso, escrevemos:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \tag{14.49}$$

A aceleração, por outro lado, se escreve como uma derivada segunda da posição, ou seja:

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \tag{14.50}$$

Assim, a lei de Newton expressa relações entre taxas de variação.

Por exemplo, a energia potencial de uma mola, como função da coordenada do móvel, é dada por:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{14.51}$$

onde $k$ é a constante elástica da mola. Portanto, a força experimentada por uma partícula presa à mola depende da sua posição de acordo com a expressão:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{1}{2}k\frac{d(x^2)}{dx} = -kx \tag{14.52}$$

Consequentemente, a segunda lei de Newton corresponde a encontrar uma solução para $x(t)$ de tal forma que:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) \tag{14.53}$$

Não é difícil verificar que a solução é da forma prevista pela expressão **14.35**, desde que a frequência seja dada por:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{14.54}$$

## 14.12 Cinética química

A área da química denominada **Cinética química** se preocupa com a determinação da velocidade com que as reações químicas ocorrem. A partir delas podemos determinar, a cada instante de tempo, a composição de uma mistura.

No contexto da cinética química preocupamo-nos com o comportamento das concentrações molares dos reagentes ($R(t)$) ou dos produtos da reação ($P(t)$). Quando do início da reação química encontramos apenas os reagentes. Depois de um determinado tempo, encontraremos apenas os produtos da reação. Assim, os reagentes desaparecem à medida que surgem os produtos da reação.

Considerando-se um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, definimos a velocidade média de desaparecimento de um reagente ($\bar{V}_R$) como a que é dada pelo quociente.

$$\bar{V}_R = -\frac{R(t_2) - R(t_1)}{t_2 - t_1} = -\frac{\Delta R}{\Delta t} \tag{14.55}$$

onde o sinal negativo se trata apenas de uma convenção, de tal forma que as velocidades resultem positivas, enquanto a velocidade instantânea de desaparecimento é determinada pelo processo-limite:

$$V_R \equiv -\lim_{\delta t \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta t} = -\frac{dP}{dt} \tag{14.56}$$

Para a velocidade de surgimento dos produtos, aplica-se o mesmo raciocínio. Assim, para o mesmo intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, definimos a velocidade média de surgimento de um produto de reação ($\bar{V}_P$) a partir do quociente:

$$\bar{V}_P = -\frac{P(t_2) - P(t_1)}{t_2 - t_1} = -\frac{\Delta P}{\Delta t} \tag{14.57}$$

enquanto a velocidade instantânea de surgimento de um dado produto da reação é dada pela derivada da concentração molar do produto da reação:

$$V_P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{dP}{dt} \quad 14.58$$

# 14.13 Tendências de mercado

No mercado de capitais, é de grande interesse estabelecer as tendências do mercado. A melhor maneira de estabelecer uma tendência (mas que pode não se confirmar na prática) é analisar sua taxa de variação.

Consideremos o caso do comportamento do preço da saca de soja na bolsa de mercadorias, cujo gráfico é apresentado no **Gráfico 14.20**. A inclinação da curva no último dia analisado, ou num determinado instante do dia, estabelece uma tendência, salvo variações inesperadas (como informações recentes sobre aumento ou diminuição da safra), ou seja, o preço no instante seguinte aos últimos preços analisados é dado por:

$$P(t) = P(t_0) + \left.\frac{dP(t)}{dt}\right|_{t=t_0} (t - t_0) \quad 14.59$$

Assim, o preço no instante seguinte é determinado pelo preço presente acrescido da taxa de variação instantânea no instante imediatamente anterior. Dependendo da inclinação da tangente, o preço pode ser superior ou inferior no instante imediato ao considerado.

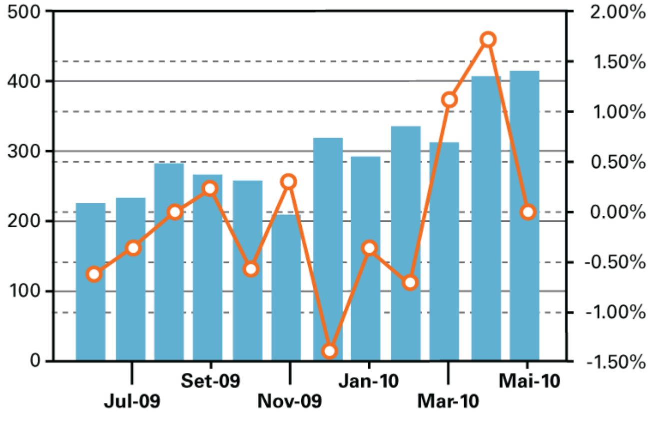



**Gráfico 14.20:** Gráfico do comportamento do preço da saca de soja na bolsa de mercadorias.

As previsões feitas pelo método acima são tanto mais confiáveis quanto maior for o conjunto de dados (obtendo uma curva mais e mais contínua) e quanto menor for o intervalo de tempo considerado. Previsões para o futuro não imediato requerem um formalismo matemático mais sofisticado.