17 EFETUANDO INTEGRAIS

Gil da Costa Marques

17.1 Introdução

Para calcular integrais das funções simples, basta fazer uso do conceito de antiderivada. Nesse caso o procedimento é simples e direto. Tudo que devemos saber é a antiderivada do integrando. Considere o exemplo abaixo:

Exemplos

- Exemplo 1:

Determine a integral definida da função de expoente real $f(x) = x^{3/2}$ no intervalo [1,4].

Sabendo-se que sua antiderivada é a função $f(x) = \frac{2}{5}\left(x^{5/2}\right)$, encontramos:

$$\int_1^4 x^{3/2}dx = \frac{2}{5}\left(x^{5/2}\right)\Big|_1^4 = \frac{2}{5}\left(\left(4^{5/2}\right) - \left(1^{5/2}\right)\right) = \frac{2}{5}\left(\left(2^5\right) - (1)\right) = \frac{62}{5} \qquad 17.1$$

E isso, como apontado antes, porque

$$\int \left(x^{3/2}\right)dx = \frac{2}{5}\left(x^{5/2}\right) + C \qquad 17.2$$

- Exemplo 2:

Analogamente, podemos escrever que a integral indefinida da função exponencial é dada por:

$$\int \left(e^x\right)dx = e^x + C \qquad 17.3$$

e, portanto, a integral definida abaixo pode ser determinada facilmente:

$$\int_0^{\ln 2} \left(e^x\right)dx = e^x\Big|_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} - 1 = 1 \qquad 17.4$$

Entretanto, determinar as primitivas de algumas funções nem sempre é tão simples. Exige que utilizemos certas propriedades e técnicas.

17.2 Algumas Propriedades da Integral Definida

Para a integral definida,valem as seguintes propriedades:

Propriedade 1

Se f e g são funções integráveis no intervalo $[a,b]$, então a função $f + g$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b \left[f(x)+g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \tag{17.5}$$

Ou seja, a integral da soma é a soma das integrais.

• Exemplo 3:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(x^2+x^3\right)dx &= \int_1^2 x^2dx + \int_1^2 x^3dx = \\ &= \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 + \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2 \\ &= \left(\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right)+\left(\frac{2^4}{4}-\frac{1^4}{4}\right) \\ &= \frac{8}{3}-\frac{1}{3}+4-\frac{1}{4}=\frac{73}{12}\end{aligned} \tag{17.6}$$

Propriedade 2

Se k é uma constante e f é uma função integrável no intervalo $[a,b]$, então a função $k{\cdot}f$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b k\cdot f(x) = k\cdot\int_a^b f(x) \tag{17.7}$$

Assim, a integral do produto de um número por uma função é igual ao produto desse número pela integral da função.

- Exemplo 4:

$$\int_1^2 4x^2dx = 4\int_1^2 x^2dx =$$

$$= 4\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \qquad 17.8$$

$$= 4\left(\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right) = 4\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) = \frac{28}{3}$$

Propriedade 3

Se f é uma função integrável no intervalo $[a,b]$ e c é um ponto qualquer do intervalo $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad 17.9$$

- Exemplo 5:

Calculemos $I = \int_1^3 x^2dx$ de duas formas:

1. primeiramente de modo direto:

$$\int_1^3 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = \frac{27}{3}-\frac{1}{3} = \frac{26}{3} \qquad 17.10$$

2. agora, usando a propriedade:

$$I = \int_1^3 x^2dx = \int_1^2 x^2dx + \int_2^3 x^2dx =$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 + \left.\frac{x^3}{3}\right|_2^3 \qquad 17.11$$

$$= \left(\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right)+\left(\frac{3^3}{3}-\frac{2^3}{3}\right)$$

$$= \frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$$

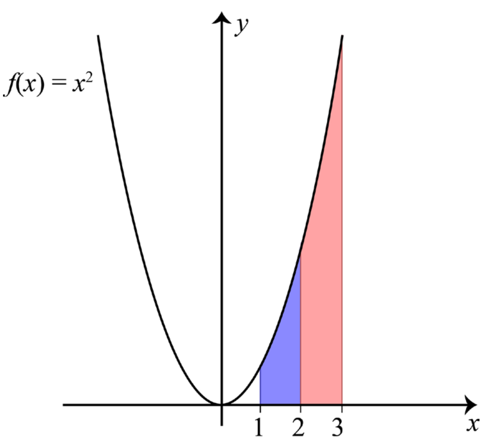

Gráfico 17.1: $I = \int_1^3 x^2dx = \int_1^2 x^2dx + \int_2^3 x^2dx$

A propriedade **17.9** se revela especialmente útil quando a função for descontínua. Assim, se c for um ponto de descontinuidade da função, a área da região compreendida entre seu gráfico e o eixo horizontal será dada pela soma definida em **17.9**.

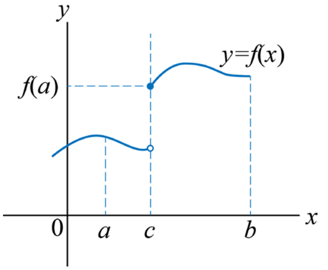

Gráfico 17.2: A função f é descontínua no ponto c e
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Propriedade 4

Se f é uma função integrável no intervalo $[a,b]$ então é válida a seguinte propriedade da integral definida

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad 17.12$$

Basta observar que $\int_a^a f(x)dx = 0$, de onde $\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = 0$.

- Exemplo 6:

$$\begin{cases} I_1 = \int_2^3 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_2^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2} \\ I_2 = \int_3^2 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_3^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{3^2}{2} = -\frac{5}{2} \end{cases} \qquad 17.13$$

Portanto, $I_1 = -I_2$, isto é:

$$\int_2^3 xdx = -\int_3^2 xdx \qquad 17.14$$

17.3 Uma primeira técnica de Integração

17.3.1 Mudança de Variável

Muitas vezes o cálculo de integrais pode ser efetuado de uma forma simples mediante uma mudança de variável. Para efeito de ilustração, consideremos o caso de uma integral de quociente de funções simples.

• Exemplo 7:

Efetue a integral, abaixo, na dependência dos parâmetros a e b.

$$I = \int_a^b \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx \tag{17.15}$$

Lembrando que:

$$d\operatorname{sen}x = \cos x dx \tag{17.16}$$

A integral acima pode ser escrita como:

$$I = \int_a^b \frac{d\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}^2 x} \tag{17.17}$$

Colocando

$$y = \operatorname{sen} x \tag{17.18}$$

Observamos que a primitiva do integrando de **17.17**, é

$$\int \frac{d(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + C = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} + C \tag{17.19}$$

Portanto,

$$I = -\frac{1}{\operatorname{sen} x}\Bigg|_a^b = \frac{1}{\operatorname{sen} a} - \frac{1}{\operatorname{sen} b} \tag{17.20}$$

Para verificarmos a validade de **17.19**, devemos derivar o lado direito de **17.19**, e verificar que essa derivada é igual ao integrando de **17.15**. De fato, obtemos

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{\operatorname{sen}x}+C\right)=-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)=\frac{1}{\left(\operatorname{sen}x\right)^2}\frac{d\operatorname{sen}x}{dx}=\frac{\cos x}{\left(\operatorname{sen}x\right)^2} \qquad 17.21$$

Consideremos uma integral definida, arbitrária, da forma:

$$I=\int_a^b g(x)dx \qquad 17.22$$

e a mudança de variável definida por:

$$x=h(u) \qquad 17.23$$

Temos que

$$dx=\frac{dh(u)}{du}du=h'(u)du \qquad a=h(u_a) \quad b=h(u_b) \qquad 17.24$$

Assim, podemos efetuar a integral por meio do uso da variável *u*. Nesse caso, a integral **17.22** se escreve:

$$I=\int_a^b g(x)dx=\int_{u_a}^{u_b} g\left(h(u)\right)h'(u)du \qquad 17.25$$

onde os limites u_a e u_b são definidos em **17.22**.

- Exemplo 8:

Os casos mais simples de integrais são aqueles envolvendo funções simples.

Consideremos agora o caso em que o argumento da função é kx, k constante. Ou seja, consideremos a integral indefinida de uma função da forma:

$$I=\int g(kx)dx \qquad 17.26$$

Efetuando a substituição

$$u = kx$$
$$du = kdx$$
$$\frac{du}{k} = dx$$

isto é,

$$u = kx \Rightarrow dx = \frac{du}{k} \qquad 17.27$$

Podemos escrever a integral **17.26**, sob a forma:

$$\int g(kx)dx = \frac{1}{k}\int g(u)\,du \qquad 17.28$$

Portanto, se y for a antiderivada de g, segue de **17.28**, que:

$$\int g(kx)dx = \frac{y(kx)}{k} + C \qquad 17.29$$

- Exemplo 9:

Determine a integral

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos(kx)dx \qquad 17.30$$

Pelo que foi visto acima, obtemos para a integral indefinida da função $g(x) = \cos(kx)$

$$\int \cos(kx)dx = \frac{\text{sen}(kx)}{k} + C \qquad 17.31$$

e, portanto, a integral definida em **17.30** é:

$$\int_0^{\pi/2} \cos(kx)\,dx = \left.\frac{\text{sen}\,kx}{k}\right|_0^{\pi/2} = \frac{\text{sen}\left(k\pi/2\right)}{k} - \frac{\text{sen}(k.0)}{k} = \frac{\text{sen}\left(k\pi/2\right)}{k} \qquad 17.32$$

• Exemplo 10:

Considere uma função dependente do tempo, que é dada pela integral:

$$x(t)-x(t_0)=\int_{t_0}^{t}\frac{av}{\sqrt{1+(av)^2}}dv \tag{17.33}$$

Em primeiro lugar, examinemos a integral indefinida:

$$\int\frac{av}{\sqrt{1+(av)^2}}\,dv=\frac{1}{2a}\int\frac{1}{\sqrt{1+u}}\,du=\frac{2}{2a}\sqrt{1+u}+C=\frac{1}{a}\sqrt{1+u}+C=\frac{1}{a}\sqrt{1+(av)^2}+C \tag{17.34}$$

aonde fizemos a mudança de variável $u = (av)^2 \Rightarrow du = 2a^2v\,dv$ e, portanto, $[1/(2a)]du = av\,dv$. Logo,

$$x(t)-x(t_0)=\frac{1}{a}\sqrt{1+(av)^2}\Big|_{t_0}^{t}=\frac{1}{a}\left(\sqrt{1+(at)^2}-\sqrt{1+(at_0)^2}\right) \tag{17.35}$$

• Exemplo 11:

Determine a integral definida no intervalo $[0, t]$, cuja expressão é:

$$y(t)=10\int_0^t\frac{dv}{\sqrt{1+4v^2}} \tag{17.36}$$

Observamos que a integral dada pode ser escrita da seguinte maneira:

$$y(t)=\frac{10}{2}\int_0^t\frac{d(2v)}{\sqrt{1+(2v)^2}} \tag{17.37}$$

e, fazendo a substituição

$$\begin{aligned}2v=\operatorname{senh}w\Rightarrow 2dv&=\cosh w\;dw\\ d(2v)&=\cosh w\;dw\end{aligned} \tag{17.38}$$

obtemos para a integral indefinida correspondente

$$5\int\frac{d(2v)}{\sqrt{1+(2v)^2}}=5\int\frac{\cosh w\;dw}{\sqrt{1+\operatorname{senh}^2 w}}=5\int dw=5w+C=5\operatorname{arcsenh}2v+C \tag{17.39}$$

ou seja

$$y(t)=5\int_0^t \frac{d(2v)}{\sqrt{1+(2v)^2}}=5\,\text{arcsenh}\,2v\Big|_0^t=5\,\text{arcsenh}\,2t-5\,\text{arcsenh}\,2.0=5\,\text{arcsenh}\,2t \quad 17.40$$

Um lembrete!

As funções hiperbólicas são definidas pelas expressões:

$$\text{senh}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad 17.41$$

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad 17.42$$

É possível verificar que

$$\frac{d}{dx}(\text{senh}\,x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x \quad 17.43$$

e que

$$\frac{d}{dx}(\cosh x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\text{senh}\,x \quad 17.44$$

Mais ainda,

$$\cosh^2 x-\text{senh}^2\,x=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}-\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}=\frac{4}{4}=1 \quad 17.45$$

de onde,

$$\cosh^2 x = 1 + \text{senh}^2 x$$

fato esse que foi usado na integral anterior.

Algumas primitivas imediatas ou quase imediatas:

- Exemplo 12:

$$\int \sec^2 x dx \tag{17.46}$$

É uma primitiva imediata pois $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$, logo

$$\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C \tag{17.47}$$

- Exemplo 13:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx \tag{17.48}$$

Uma vez que $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, temos que

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \operatorname{tg} x - x + C \tag{17.49}$$

- Exemplo 14:

Neste exemplo é preciso um cuidado especial.

$$\int \frac{1}{x} dx \tag{17.50}$$

A função integrando está definida para todo número real não nulo.

- Se $x > 0$ então $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ pois $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ (17.51)
- Se $x < 0$ então $\int \frac{1}{x} dx = \int -\frac{1}{-x} dx = \ln(-x) + C$ pois $\frac{d}{dx}(\ln(-x)) = -\frac{1}{-x}$ pela Regra da Cadeia. (17.52)

  (Lembre que só existe logaritmo de número estritamente positivo e que, se $x < 0$, então $-x > 0$.)

Logo, reunindo os dois casos,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \tag{17.53}$$

- Exemplo 15:

$$\int \frac{1-5x}{3x+1}dx \tag{17.54}$$

Como

$$\frac{1-5x}{3x+1} = -\frac{5}{3} + \frac{\frac{8}{3}}{3x+1} = -\frac{5}{3} + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3x+1} \tag{17.55}$$

(faça a divisão de polinômios para chegar a esse resultado)

temos:

$$\int \frac{1-5x}{3x+1}dx = \int \left(-\frac{5}{3} + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3x+1} \right) dx = -\frac{5}{3}x + \frac{8}{9}\ln\left|3x+1\right| + C \tag{17.56}$$

(verifique com cuidado.)

- Exemplo 16:

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx \tag{17.57}$$

Como $\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$, então

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = x - \operatorname{arctg} x + C \tag{17.58}$$

pois $\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$.

- Exemplo 17:

$$\int 2e^{-3x}dx \tag{17.59}$$

$$\int 2e^{-3x}dx = 2\int e^{-3x}dx = -\frac{2}{3}e^{-3x} + C \tag{17.60}$$

(verifique.)

17.3.2 Primitivação por substituição

Lembramos, utilizando o conceito de função composta, que: $\int f\left(g\left(x\right)\right).g'\left(x\right)dx = \int f\left(u\right)du$.

É importante observar que, para utilizar esta técnica, é importante que no integrando esteja presente a derivada – ou quase, a menos de constante multiplicando – de uma função $u = g(x)$, sendo u a variável de uma outra função que se quer integrar.

Alguns exemplos resolvidos:

- Exemplo 18:

$$\int x^2 \operatorname{sen}\left(x^3+5\right)dx$$

Como x^2 é "quase" a derivada de x^3, fazemos:

$$u = x^3+5 \Rightarrow du = 3x^2dx \text{ ou } (1/3)du = x^2dx$$

e daí

$$\int x^2 \operatorname{sen}\left(x^3+5\right)dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{sen} u\, du = -\frac{1}{3}\cos u + C = -\frac{1}{3}\cos\left(x^3+5\right)+C$$

(Lembre que $\int k.f\left(x\right)dx = k.\int f\left(x\right)dx$. Por quê?)

- Exemplo 19:

$$\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x\, dx$$

Basta notar que $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen} x\right) = \cos x$; logo fazemos:

$$u = \operatorname{sen} x \Rightarrow du = \cos x\, dx$$

e daí

$$\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x\, dx = \int \sqrt{u}\, du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\left(\operatorname{sen} x\right)^{3/2} + C$$

- Exemplo 20:

$$\int x\sqrt[3]{3x^2+1}\,dx$$

Tendo em vista que

$$\frac{d}{dx}\left(3x^2+1\right)=6x$$

fazemos:

$$u=3x^2+1 \Rightarrow du=6x\,dx$$

e daí

$$\int x\sqrt[3]{3x^2+1}\,dx=\frac{1}{6}\int\sqrt[3]{u}\,du=\frac{1}{6}\int u^{\frac{1}{3}}du=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}+C=\frac{1}{8}\left(3x^2+1\right)^{\frac{4}{3}}+C=\frac{1}{8}\sqrt[3]{\left(3x^2+1\right)^4}+C$$

- Exemplo 21:

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-9x^3}}dx$$

Considerando que

$$\frac{d}{dx}\left(1-9x^3\right)=-27x^2$$

fazemos:

$$u=1-9x^3 \Rightarrow du=-27x^2dx$$

e daí

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-9x^3}}dx=-\frac{1}{27}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=-\frac{1}{27}\int u^{-\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{27}\cdot 2u^{\frac{1}{2}}+C=-\frac{2}{27}\sqrt{1-9x^3}+C$$

- Exemplo 22:

$$\int e^{3x}\,dx$$

Uma vez que $\frac{d}{dx}\left(e^{3x}\right) = 3e^{3x}$, fazemos:

$$u = e^{3x} \Rightarrow du = 3e^{3x}dx$$

logo,

$$\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int du = \frac{u}{3} + C = \frac{e^{3x}}{3} + C$$

- Exemplo 23:

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx$$

Uma vez que

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^3}\right) = 3x^2 \cdot e^{x^3}dx$$

fazemos:

$$u = e^{x^3} \Rightarrow du = 3x^2 \cdot e^{x^3}dx$$

logo,

$$\int x^2 e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int du = \frac{u}{3} + C = \frac{e^{x^3}}{3} + C$$

Mais dois exemplos, envolvendo esta técnica, no caso de integrais definidas:

- Exemplo 24:

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$$

É preciso observar que a variável x varia no intervalo $[1, 2]$.
Há duas maneiras de proceder:
Calculamos primeiro a integral indefinida $\int \frac{\ln x}{x}dx$ e depois a integral definida. Assim,

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

(Note a substituição $u = \ln x \Rightarrow du = (1/x)dx$)
Agora,

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^2 = \frac{\ln^2 2}{2}$$

pois $\ln 1 = 0$.

- Outra maneira de calcular $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$ é, ao fazer a mudança de variável, mudar também os limites de integração, colocando agora a variação de u.
Assim, fazendo

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$

temos:

$$x = 1 \Rightarrow u = 0$$
$$x = 2 \Rightarrow u = \ln 2$$

logo

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \int_0^{\ln 2} u\,du = \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^{\ln 2} = \frac{\ln^2 2}{2}$$

como antes.

- Exemplo 25:

$$\int_0^1 2^x dx$$

Temos:

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

(Lembre que $2^x = e^{\ln 2^x} = e^{x \ln 2}$ e, portanto, $\frac{d}{dx}\left(2^x\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{x \ln 2}\right) = e^{x \ln 2} \cdot \ln 2 = 2^x \ln 2$)

Assim,

$$\int_0^1 2^x dx = \left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_0^1 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \, .$$