18 OUTRAS TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

Gil da Costa Marques

18.1 Integração por partes

Sejam u e v duas funções da variável x. Levando–se em conta a propriedade relativa à derivada do produto de funções:

$$\frac{d}{dx}\left(u(x)\cdot v(x)\right)=\frac{du(x)}{dx}\cdot v(x)+\frac{dv(x)}{dx}\cdot u(x) \tag{18.1}$$

na notação de integrais indefinidas, temos:

$$u(x)\cdot v(x)=\int u'(x)\cdot v(x)dx+\int v'(x)\cdot u(x)dx \tag{18.2}$$

donde inferimos que:

$$\int v'(x)\cdot u(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int u'(x)\cdot v(x)dx$$

Exemplos

- Exemplo 1:

Calculemos

$$I=\int x\cos x\ dx \tag{18.3}$$

Introduzindo as variáveis u e v, de acordo com as expressões

$$u=x \ \text{ e } \ v'=\cos x \tag{18.4}$$

de onde temos:

$$u'=1 \ \text{ e } \ v=\operatorname{sen} x \tag{18.5}$$

Assim, utilizando a expressão **18.2**, obtemos para a integral acima a seguinte expressão:

$$\int x\cos x dx=x\operatorname{sen} x-\int 1\cdot\operatorname{sen} x dx \tag{18.6}$$

ou seja,

$$\int x\cos x dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C \tag{18.7}$$

Agora, no caso de uma integral definida, temos:

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{\pi} x\cos x dx &= [x \operatorname{sen} x + \cos x]_{\pi/2}^{\pi} = \\ &= \pi \operatorname{sen} \pi + \cos \pi - \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -1 - \frac{\pi}{2}\end{aligned} \tag{18.8}$$

- Exemplo 2:

Consideremos a integral da função $y(x) = x\cos(x^2 + 1)$ no intervalo de valores da variável independente $[0,2]$. Isto é, determinemos a integral definida:

$$I = \int_0^2 x\cos\left(x^2 + 1\right) \, dx \tag{18.9}$$

Primeiramente introduzimos uma mudança de variáveis da forma

$$u = x^2 + 1 \tag{18.10}$$

o que nos leva à seguinte expressão para a diferencial de u:

$$du = 2\, x \, dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} du = x \, dx \tag{18.11}$$

Além disso, se $u = x^2 + 1$, temos:

$$\begin{cases} x = 0 & \Rightarrow \quad u = 1 \\ x = 2 & \Rightarrow \quad u = 5 \end{cases} \tag{18.12}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 x\cos\left(x^2+1\right) \, dx = \int_0^2 \left[\cos\ \left(x^2+1\right)\right]\left[x \, dx\right] = \\ &= \int_1^5 [\cos u]\left[\frac{1}{2} \, du\right] = \frac{1}{2}\int_1^5 \cos u \, du = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} u \Big|_1^5 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\ 5 - \operatorname{sen} 1\right)\end{aligned} \tag{18.13}$$

Levando em conta que

$$\begin{cases} \text{sen } 5 \cong -0,958924 \\ \text{sen } 1 \cong 0,841471 \end{cases} \quad 18.14$$

obtemos, finalmente:

$$I \cong \frac{1}{2}(-0,958924 - 0,841471) = -0,900197 \quad 18.15$$

18.2 Integrais de funções trigonométricas

Muitas vezes estamos diante de integrais de funções trigonométricas cuja resolução envolve o uso de suas propriedades. A seguir, daremos alguns exemplos.

- Exemplo 3:

Efetue a seguinte integral

$$I = \int_a^b \text{tg} x dx \quad 18.16$$

A integral acima pode ser reescrita

$$I = \int_a^b \frac{\text{sen } x}{\cos x} dx \quad 18.17$$

Lembrando que

$$d \cos x = -\text{sen } x dx \quad 18.18$$

a integral acima pode ser escrita como:

$$I = -\int_a^b \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x|\Big|_a^b = \ln|\sec x|\Big|_a^b = \ln\frac{|\sec b|}{|\sec a|} = \ln\frac{|\cos a|}{|\cos b|} \quad 18.19$$

- Exemplo 4:

Determine a integral indefinida

$$y(x) = \int \left(\cos^2 x\right) dx \tag{18.20}$$

Lembrando que

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2\, x = \cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) \tag{18.21}$$

concluímos que

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(\cos 2x + 1\right) \tag{18.22}$$

Substituindo-se essa expressão em **18.20**, obtemos:

$$y(x) = \int \left(\cos^2 x\right) dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos 2x + 1\right) dx \tag{18.23}$$

Esta última expressão pode ser facilmente integrada. Obtemos:

$$y(x) = \frac{1}{4}\,\text{sen}\, 2x + \frac{1}{2}x + C \tag{18.24}$$

18.3 Uso de funções trigonométricas

Muitas integrais podem ser efetuadas por meio de substituições que envolvem funções trigonométricas. A seguir, ilustraremos tal fato com dois exemplos.

- Exemplo 5:

Determine a integral indefinida I, definida a seguir, no intervalo [0,1].

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)}}\, dx \tag{18.25}$$

→ Resolução

Efetuando a substituição, envolvendo a função seno:

$$x = 2\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow dx = 2\cos\theta d\theta \tag{18.26}$$

onde $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, a fim de que a função $x = 2\text{sen}\,\theta$ seja inversível e exista a função integrando.

A integral indefinida associada à integral definida proposta é escrita, em termos da função da variável θ, como:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}}dx &= \int \frac{2\cos\theta}{\sqrt{1-\text{sen}^2\,\theta}}d\theta = \\ &= \int \frac{2\cos\theta}{|\cos\theta|}d\theta = \int 2d\theta = \\ &= 2\theta + C = 2\,\text{arcsen}\frac{x}{2} + C\end{aligned} \tag{18.27}$$

Observamos que

$$\sqrt{1-\text{sen}^2\,\theta} = \sqrt{\cos^2\theta} = |\cos\theta| = \cos\theta \;\; \text{pois} \;\; -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \tag{18.28}$$

A integral definida proposta é, portanto, dada por:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}}dx = 2\,\text{arcsen}\frac{x}{2}\bigg|_0^1 = 2\left(\text{arcsen}\frac{1}{2} - \text{arcsen}\,0\right) = 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} \tag{18.29}$$

- Exemplo 6:

Encontre o valor da integral definida:

$$I = \int_1^3 \frac{1}{x^2\sqrt{(9+x^2)}}dx \tag{18.30}$$

→ Resolução

Determinemos a integral indefinida associada à integral acima mediante a substituição:

$$x = 3\,\text{tg}\,\theta \Rightarrow dx = 3\sec^2\theta d\theta = 3\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 d\theta \tag{18.31}$$

onde $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ a fim de que a função $x = 3\,\text{tg}\theta$ seja inversível.

Obtemos então:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{x^2\sqrt{\left(9+x^2\right)}}dx = \\
&= \int \frac{1}{9\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\sqrt{9\left(1+\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\right)}}3\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \\
&= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta\sqrt{1+\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}}}d\theta = \\
&= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}}d\theta = \\
&= \frac{1}{9}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}d\theta
\end{aligned} \qquad 18.32$$

Observamos que $\sqrt{\cos^2\theta} = |\cos\theta| = \cos\theta$, pois $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.
Lembrando que:

$$\frac{1}{9}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}d\theta = \frac{1}{9}\int\frac{du}{u^2} = \frac{1}{9}\cdot\left(-\frac{1}{u}\right)+C \qquad 18.33$$

onde fizemos a substituição

$$u = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow du = \cos\theta d\theta \qquad 18.34$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{9}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}d\theta &= -\frac{1}{9}\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}+C = \\
&= -\frac{1}{9}\frac{\sec\theta}{\operatorname{tg}\theta}+C
\end{aligned} \qquad 18.35$$

(Verifique!)
Assim, finalmente, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{9}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}d\theta &= -\frac{1}{9}\frac{\sqrt{\dfrac{x^2}{9}+1}}{\dfrac{x}{3}}+C = \\
&= -\frac{1}{9}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}+C
\end{aligned} \qquad 18.36$$

E, portanto, a integral definida solicitada é dada por:

$$I=\int_1^3 \frac{1}{x^2\sqrt{(9+x^2)}}dx=-\frac{1}{9}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}\Bigg|_1^3=-\frac{1}{9}\frac{\sqrt{9+9}}{3}+\frac{1}{9}\frac{\sqrt{1^2+9}}{1}=\frac{1}{9}\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right) \tag{18.37}$$

18.4 Integração de Quociente de Polinômios

Integrais de funções dadas por um quociente de polinômios (**as funções racionais**) podem ser efetuadas mediante o uso de expressões que envolvem somas de funções (ou expressões) mais simples, ou seja, transformamos a função racional dada numa soma de frações parciais.

- Exemplo 7:

Determine a integral indefinida da função $y=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$.

→ Resolução

A integral indefinida se escreve:

$$\int \frac{1}{x^2+3x+2}dx \tag{18.38}$$

Observamos que o denominador é um polinômio de segundo grau que tem raízes:

$$\begin{aligned} x_1&=\frac{-3+\sqrt{9-4\cdot 2}}{2}=-1\\ x_2&=\frac{-3-\sqrt{9-4\cdot 2}}{2}=-2 \end{aligned} \tag{18.39}$$

Assim, podemos escrever o polinômio de segundo grau sob a forma:

$$x^2+3x+2=(x+2)(x+1) \tag{18.40}$$

e, portanto,

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+2)(x+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1} \tag{18.41}$$

Resta-nos agora encontrar A e B.
De **18.41** podemos escrever

$$1 = A(x+1) + B(x+2) \tag{18.42}$$

Essa igualdade entre polinômios é verdadeira para qualquer valor de x. Assim, fazendo

$$\begin{aligned} x = -1:&\ 1 = A\cdot 0 + B\cdot 1 \Rightarrow B = 1 \\ x = -2:&\ 1 = A\cdot(-1) + B\cdot 0 \Rightarrow A = -1 \end{aligned} \tag{18.43}$$

temos

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{-1}{x+2} + \frac{1}{x+1} \tag{18.44}$$

A integral indefinida que se quer determinar pode ser escrita como a integral da soma de duas frações parciais:

$$\int \frac{1}{x^2+3x+2}dx = \int \frac{-1}{x+2}dx + \int \frac{1}{x+1}dx = -\ln|x+2| + C_1 + \ln|x+1| + C_2 \tag{18.45}$$

Donde concluímos que:

$$\int \frac{1}{x^2+3x+2}dx = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C,\ \text{onde } C = C_1 + C_2 \tag{18.46}$$

18.5 Alguns exemplos resolvidos

18.5.1 Primitivação por partes

Lembremos novamente que

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \tag{18.47}$$

desde que f e g sejam funções deriváveis.

E, portanto:

$$f(x)\cdot g(x)=\int\left[f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)\right]dx=\int f'(x)\cdot g(x)dx+\int f(x)\cdot g'(x)dx \quad 18.48$$

ou seja,

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx=f(x)\cdot g(x)-\int f'(x)\cdot g(x)dx \quad 18.49$$

Fazendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$, temos $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$ e daí podemos escrever:

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du \quad 18.50$$

- Exemplo 8:

Determine a integral indefinida: $\int x\ln x dx$.
A fim de calcular esta integral, é preciso fazer uma escolha para u e dv. Vejamos: colocando $u = x$ e $dv = \ln x\,dx$, encontramos $du = dx$, mas não conseguimos facilmente determinar $v = \int \ln x\ dx$. Isso nos leva a tentar a outra escolha:

$$u=\ln x \ \text{ e } \ dv = xdx \quad 18.51$$

de onde

$$du=\left(\frac{1}{x}\right)dx \ \text{ e } \ v=\frac{x^2}{2} \quad 18.52$$

Logo,

$$\int x\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C \quad 18.53$$

- Exemplo 9:

Determine a integral indefinida: $\int \ln x dx$.
Neste exemplo há apenas uma possibilidade de escolha:

$$u=\ln x \ \text{ e } \ dv=dx \quad 18.54$$

de onde

$$du = \frac{1}{x}dx \ \text{ e } \ v = x \qquad 18.55$$

Logo,

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C \qquad 18.56$$

- Exemplo 10:

Determine a integral indefinida: $\int x e^x dx$.
Neste exemplo fazemos:

$$u = x \ \text{ e } \ dv = e^x dx \qquad 18.57$$

de onde

$$du = dx \ \text{ e } \ v = e^x \qquad 18.58$$

Logo

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C \qquad 18.59$$

Sugestão!
Faça a outra possível escolha e convença-se de que ela não é adequada.

- Exemplo 11:

Calcule a integral indefinida $\int \operatorname{arctg} x dx$.
Neste exemplo fazemos:

$$u = \operatorname{arctg} x \ \text{ e } \ dv = dx \qquad 18.60$$

de onde

$$du = \frac{1}{1+x^2}dx \ \text{ e } \ v = x \qquad 18.61$$

Logo,

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C \qquad 18.62$$

- Exemplo 12:

Calcule a integral indefinida: $\int x \operatorname{sen} x dx$.
Neste exemplo fazemos:

$$u = x \quad \text{e} \quad dv = \operatorname{sen} x dx \tag{18.63}$$

de onde

$$du = dx \quad \text{e} \quad v = -\cos x \tag{18.64}$$

Logo,

$$\int x \operatorname{sen} x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C \tag{18.65}$$

- Exemplo 13:

Calcule a integral indefinida: $\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x dx$.
Neste exemplo fazemos:

$$u = e^x \quad \text{e} \quad dv = \operatorname{sen} x dx \tag{18.66}$$

de onde

$$du = e^x dx \quad \text{e} \quad v = -\cos x \tag{18.67}$$

Logo,

$$\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x dx = -\mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \cos x dx \tag{18.68}$$

Chegamos a uma integral com o mesmo grau de dificuldade e para a qual aplicamos a mesma técnica, fazendo:

$$u = e^x \quad \text{e} \quad dv = \cos x dx \tag{18.69}$$

de onde

$$du = e^x dx \quad \text{e} \quad v = \operatorname{sen} x \tag{18.70}$$

Logo,

$$\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x dx = -\mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \cos x dx = -\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x - \int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x dx \tag{18.71}$$

de onde

$$2\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x dx = -\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x + K \tag{18.72}$$

ou seja,

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + C \quad \text{onde } C = \frac{K}{2} \qquad 18.73$$

Sugestão!

Determine novamente a integral fazendo a outra escolha possível.

- Exemplo 14:

Determine a integral indefinida: $\int x^2 e^{-2x} dx$.

Fazemos

$$u = x^2 \ \text{ e } \ dv = e^{-2x} dx \qquad 18.74$$

de onde

$$du = 2x dx \ \text{ e } \ v = \frac{e^{-2x}}{-2} \qquad 18.75$$

Logo,

$$\int x^2 e^{-2x} dx = -x^2 \cdot \frac{e^{-2x}}{2} + \int \frac{e^{-2x}}{2} 2x dx = -x^2 \cdot \frac{e^{-2x}}{2} + \int x \cdot e^{-2x} dx \qquad 18.76$$

A nova integral é mais fácil do que a inicial. Aplicando novamente a técnica de integração por partes, temos:

$$u = x \ \text{ e } \ dv = e^{-2x} dx \qquad 18.77$$

de onde

$$du = dx \ \text{ e } \ v = \frac{e^{-2x}}{-2} \qquad 18.78$$

Logo

$$\int x e^{-2x} dx = -x \cdot \frac{e^{-2x}}{2} + \int \frac{e^{-2x}}{2} dx = -x \cdot \frac{e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x} dx = -x \cdot \frac{e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C \qquad 18.79$$

Assim, a solução da integral inicial é:

$$\int x^2 e^{-2x} dx = -x^2 \frac{e^{-2x}}{2} - x\frac{e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C = -\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + C \quad 18.80$$

18.5.2 Primitivação de frações racionais transformando-as em frações parciais

Vejamos alguns exemplos que envolvem a integração de funções racionais, isto é, funções que são quociente de funções polinomiais.

- Exemplo 15:

Determine a integral indefinida: $\int \frac{1}{16+x^2}dx$.

Observamos que, neste exemplo, a fração dada não pode ser transformada na soma de duas frações mais simples, uma vez que o denominador não é fatorável. Entretanto, é um exemplo muito importante e, por esse motivo, o apresentamos em primeiro lugar, ao pensar na integração de funções racionais.

$$\int \frac{1}{16+x^2}dx = \int \frac{1}{16\left(1+\frac{x^2}{16}\right)}dx = \frac{1}{16}\int \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{16}\right)}dx \quad 18.81$$

Fazendo:

$$u = \frac{x}{4} \Rightarrow du = \frac{1}{4}dx \quad 18.82$$

e então

$$\int \frac{1}{16+x^2}dx = \frac{1}{16}\int \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{16}\right)}dx = \frac{1}{16}\int \frac{1}{1+u^2}4du = \frac{1}{4}\operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + C \quad 18.83$$

O raciocínio utilizado pode ser, evidentemente, generalizado para qualquer integral indefinida do tipo $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$, onde a é um número real não nulo.

- Exemplo 16:

Calcule a integral: $\int \frac{1}{4-x^2}dx$.

A fração racional, que constitui o integrando, pode ser decomposta na soma de duas frações mais simples:

$$\frac{1}{4-x^2}=\frac{A}{2-x}+\frac{B}{2+x} \tag{18.84}$$

A fim de encontrar os coeficientes A e B, temos, a partir da igualdade acima:

$$1=A(2+x)+B(2-x) \tag{18.85}$$

onde temos dois polinômios idênticos, ou seja, a igualdade entre eles vale para qualquer valor real da variável x. Em particular, quando

$$\begin{gathered} x=-2 \Rightarrow 1=4B \Rightarrow B=\frac{1}{4} \\ x=2 \Rightarrow 1=4A \Rightarrow A=\frac{1}{4} \end{gathered} \tag{18.86}$$

Daí, podemos escrever:

$$\frac{1}{4-x^2}=\frac{\frac{1}{4}}{2-x}+\frac{\frac{1}{4}}{2+x} \tag{18.87}$$

E, portanto,

$$\int \frac{1}{4-x^2}dx=\frac{1}{4}\int \frac{1}{2-x}dx+\frac{1}{4}\int \frac{1}{2+x}dx \tag{18.88}$$

ou seja,

$$\int \frac{1}{4-x^2}dx=-\frac{1}{4}\ln|2-x|+\frac{1}{4}\ln|2+x|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+C \tag{18.89}$$

- Exemplo 17:

Calcule a integral indefinida: $\int \frac{1}{x^2(5-x)}dx$.

Vamos decompor a fração racional em frações mais simples:

$$\frac{1}{x^2(5-x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{D}{5-x} \tag{18.90}$$

A partir da igualdade acima, podemos escrever:

$$1=A\cdot x\cdot(5-x)+B\cdot(5-x)+D\cdot x^2 \tag{18.91}$$

onde temos dois polinômios idênticos, ou seja, a igualdade entre eles vale para qualquer valor real da variável x. Em particular, quando

$$x = 0 \Rightarrow 1 = 5B \Rightarrow B = \frac{1}{5}$$
$$x = 5 \Rightarrow 1 = 25D \Rightarrow D = \frac{1}{25} \qquad 18.92$$
$$x = 1 \Rightarrow 1 = 4A + 4B + D \Rightarrow 1 = 4A + \frac{21}{25} \Rightarrow A = \frac{1}{25}$$

Daí, podemos escrever:

$$\int \frac{1}{x^2(5-x)}dx = \frac{1}{25}\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{x^2}dx + \frac{1}{25}\int \frac{1}{5-x}dx = \frac{1}{25}\ln|x| - \frac{1}{5}x^{-1} - \frac{1}{25}\ln|5-x| + C =$$
$$= \frac{1}{25}\ln\left|\frac{x}{5-x}\right| - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x} + C \qquad 18.93$$

- Exemplo 18:

Obtenha a integral indefinida dada a seguir: $\int \frac{1}{x^2 + x + 2}dx$.

Observamos, em primeiro lugar, que o polinômio que está no denominador do integrando é irredutível; logo, não pode ser fatorado, pois seu discriminante é negativo, isto é $\Delta < 0$.
Completando os quadrados, podemos escrever:

$$x^2 + x + 2 = x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \qquad 18.94$$

e, portanto, podemos escrever:

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 2}dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}dx = \frac{4}{7}\int \frac{1}{\frac{4}{7}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1}dx \qquad 18.95$$

Agora, na nova integral, notamos que, ao fazer a substituição,

$$u = \sqrt{\frac{4}{7}}\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow du = \sqrt{\frac{4}{7}}dx \qquad 18.96$$

obtemos no integrando a derivada da função arctg. De fato,

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 2}dx = \frac{4}{7}\int \frac{1}{\frac{4}{7}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1}dx = \frac{4}{7}\int \frac{2}{u^2 + 1}\cdot\sqrt{\frac{7}{4}}du = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg} u + C =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{7}}\left(x + \frac{1}{2}\right) + C \qquad 18.97$$

Observação:

A técnica de decomposição em frações parciais baseia-se em alguns teoremas, que passamos a enunciar. Um maior aprofundamento sobre essa técnica pode ser encontrado em http://ecalculo.if.usp.br.

Teorema 1

Sejam a, b, α e β números reais, com $\alpha \neq \beta$. Então, existem números reais A e B, tais que:

$$\frac{ax+b}{(x-\alpha)\cdot(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} \tag{18.98}$$

Teorema 2

Sejam α e β números reais, com $\alpha \neq \beta$ e P um polinômio cujo grau é estritamente menor que 3. Então, existem números reais A, B e D, tais que:

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)\cdot(x-\beta)^2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{D}{(x-\beta)^2} \tag{18.99}$$

Teorema 3

Sejam b, c, α números reais e P, um polinômio cujo grau é estritamente menor que 3. Suponhamos ainda que $x^2 + bx + c$ não admita raízes reais, isto é, seu discriminante é menor que zero. Então, existem números reais A, B e D, tais que:

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)\cdot(x^2+bx+c)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+D}{x^2+bx+c} \tag{18.100}$$

Teorema 4

Sejam b, c e α números reais e P, um polinômio cujo grau é estritamente menor que 5. Suponhamos ainda que $x^2 + bx + c$ não admita raízes reais, isto é, seu discriminante é menor que zero. Então, existem números reais A, B, D, E e F, tais que:

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)\cdot(x^2+bx+c)^2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+D}{x^2+bx+c} + \frac{Ex+F}{(x^2+bx+c)^2} \tag{18.101}$$

Precisamos observar que o polinômio do denominador sempre pode ser decomposto num produto de fatores do primeiro ou do segundo grau. Os fatores de primeiro grau aparecem quando existem raízes reais; as raízes complexas são responsáveis pelos fatores de segundo grau.

Evidentemente, todos esses teoremas poderiam ser enunciados numa forma mais geral. O que precisa estar claro é o fato de que o grau do polinômio do numerador deve ser estritamente menor do que o grau do polinômio do denominador para podermos efetuar a decomposição em frações parciais. Se não for esse o caso, primeiro fazemos a divisão de polinômios, a fim de tornar o problema mais simples e poder decompor a fração.

18.5.3 Primitivação com substituições trigonométricas

Existem situações em que substituições que envolvem funções trigonométricas são muito úteis.

- Exemplo 19:

Calcule a integral indefinida: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

Neste caso, fazendo

$$x = \operatorname{tg}\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta \, d\theta \tag{18.102}$$

temos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta+1}} d\theta = \int \sec\theta d\theta \tag{18.103}$$

Note que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, a fim de que a função $x = \operatorname{tg}\theta$ seja inversível e, portanto, $\sqrt{\sec^2\theta} = |\sec\theta| = \sec\theta$, uma vez que, para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\sec\theta > 0$.

Agora,

$$\int \sec\theta d\theta = \int \frac{\sec\theta.(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)}{(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)} d\theta = \int \frac{(\sec^2\theta + \sec\theta.\operatorname{tg}\theta)}{(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)} d\theta = \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C \tag{18.104}$$

(observe o artifício de multiplicar e dividir por $\sec\theta + \operatorname{tg}\theta$, a fim de obter, no numerador, a derivada do denominador).

Retornando à variável x, obtemos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \ln|\sqrt{x^2+1}+x|+C \qquad 18.105$$

(Verifique!)

- Exemplo 20:

Calcule a integral indefinida: $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$.
Começamos utilizando a integração por partes, fazendo:

$$u=\sqrt{x^2+1} \ \text{ e } \ dv = dx \qquad 18.106$$

de onde

$$du = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \ \text{ e } \ v = x \qquad 18.107$$

Então,

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,x dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \qquad 18.108$$

Ainda podemos escrever

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+1}\,dx &= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \\ &= x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx\end{aligned} \qquad 18.109$$

e, a partir daí,

$$2\int \sqrt{x^2+1}\,dx = x\sqrt{x^2+1} + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \qquad 18.110$$

Para a última integral, utilizamos o exemplo anterior e obtemos então:

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1} + \ln|\sqrt{x^2+1}+x|\right] + C \qquad 18.111$$

- Exemplo 21:

Determine a integral indefinida: $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Neste caso, fazendo

$$x = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow dx = \cos\theta d\theta \qquad 18.112$$

e observando que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, a fim de que a função $x = \operatorname{sen}\theta$ seja inversível, temos:

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \int\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}\cdot\cos\theta d\theta = \int\cos^2\theta d\theta \qquad 18.113$$

onde observamos que $\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta} = |\cos\theta| = \cos\theta$, uma vez que, para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta > 0$. Assim,

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \int\cos^2\theta d\theta = \int\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4} + C \qquad 18.114$$

(lembre-se de que $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$, isto é, $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, ou seja, $\frac{\cos 2\theta + 1}{2} = \cos^2\theta$). Retornando à variável x, temos:

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\operatorname{arcsen} x}{2} + \frac{2\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)\cos(\operatorname{arcsen} x)}{4} + C = \frac{\operatorname{arcsen} x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C \qquad 18.115$$

(Verifique!)