

ESTÁTICA 17

Gil da Costa Marques

- 17.1** Introdução
- 17.2** Condição para o equilíbrio do ponto material
- 17.3** Equilíbrio do corpo rígido: Translações
 - 17.3.1** O Centro de Massa ou Centro de Gravidade
- 17.4** Equilíbrio do corpo rígido: Rotações
- 17.5** Máquinas simples
 - 17.5.1** Força motriz ou força potente
 - 17.5.2** Força resistente
 - 17.5.3** Elemento de ligação
- 17.6** Tipos básicos de máquinas simples
 - 17.6.1** Alavanca
 - 17.6.1.1** Interfixa
 - 17.6.1.2** Inter-resistente
 - 17.6.1.3** Interpotente
 - 17.6.1.4** Condições de equilíbrio das alavancas
 - 17.6.2** Roldanas
 - 17.6.3** Roda e Eixo
 - 17.6.4** Engrenagens

17.1 Introdução

A estática é uma área da Mecânica em que procuramos estudar as condições sob as quais podem ocorrer situações de equilíbrio em um sistema físico. Por sistema físico podemos entender desde uma partícula material (corpos de dimensão desprezível) até sistemas que envolvem vários corpos rígidos.

Equilíbrio, como se sabe, é um conceito bastante abrangente, que, em geral, está associado ao conceito de imutabilidade ou, mais precisamente, de estabilidade. Na mecânica, esse conceito se refere à situação em que um corpo rígido – ou sistema de corpos rígidos – permanece em repouso (sem experimentar deslocamentos ou rotações) quando sob a ação de forças aplicadas a ele. O sistema se comporta de uma forma que ele aparenta ser imutável.

De acordo com Dugas em seu livro **A history of mechanics**, o primeiro livro de Mecânica, e um dos primeiros compêndios do que hoje denominamos ciências exatas, teria como título “Mecânica” (autor desconhecido) e nele são apresentados estudos sobre as máquinas simples, tema esse usualmente discutido na estática. Assim, essa teria sido a primeira área de interesse da mecânica, interesse esse reforçado algum tempo depois por Arquimedes ao empreender estudos sistemáticos da estática.

Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.) foi um dos maiores matemáticos da Antiguidade. Ele é também considerado por alguns historiadores como o pai da Mecânica. Introduziu, no estudo da estática e da hidrostática (estudo dos sistemas fluidos em equilíbrio), o que chamamos hoje de método científico, aliando em certo sentido o empirismo à formulação das leis e demonstrações de teoremas, usando conceitos de geometria e da álgebra.

Figura 17.1: Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.), o precursor dos princípios matemáticos aplicados à filosofia natural.



Os trabalhos importantes de Arquimedes, na mecânica, foram publicados em dois livros: **Sobre o Equilíbrio dos Planos** (dois volumes) e **Sobre os Corpos Flutuantes**. No primeiro, Arquimedes desenvolve princípios básicos da Estática, entre os quais se incluem as “leis da Alavanca”, e discute a determinação do centro de gravidade dos corpos.

Inúmeras são as aplicações dos princípios da estática, especialmente na área da engenharia civil. Nas construções civis, destacam-se as gruas, os guindastes e as pontes. O entendimento do funcionamento de partes do corpo humano, estudado na biomecânica, faz uso de conceitos extraídos da estática.



Figura 17.2: Ponte Estaiada na cidade de São Paulo. Foi construída tendo como base científica, entre outros, os princípios que regem a Estática.

17.2 Condição para o equilíbrio do ponto material

Um ponto material é definido como um objeto que tem dimensões desprezíveis. Assim, ele permanecerá em repouso (se essa for a sua condição inicial) se nenhuma força for aplicada a ele ou se for nula a resultante das forças que atuam sobre ele (que é a somatória das forças). O corpo permanecerá em repouso se for nula a sua velocidade inicial. Assim, admitimos que o sistema de referência escolhido não esteja em movimento em relação ao ponto material.

Geralmente, dizemos que a condição necessária e suficiente para que um ponto material esteja em equilíbrio (ou seja, em repouso) é a de que a soma das forças aplicadas a ele se anule. Se o ponto material estiver sob a ação de n forças e sendo \vec{F}_i a i -ésima força agindo sobre o ponto material, a condição de equilíbrio se escreve assim:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

Em geral, tal situação ocorre apenas para um ponto do espaço. Esse ponto é denominado **ponto de equilíbrio**.



Exemplos

• **EXEMPLO 01**

Uma caixa de peso 100 N é mantida em equilíbrio, conforme ilustra a **Figura 17.3**.

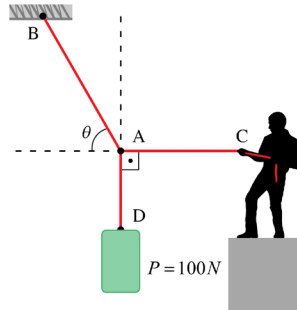


Figura 17.3: Por meio do sistema de 3 cordas leves e inextensíveis, o operador que puxa a corda AC mantém a caixa de peso $P = 100\text{ N}$ em repouso. A corda AD (devido ao peso) tem posição vertical, e a corda AC tem posição horizontal.

Sendo $\cos\theta = 0,60$, determinar as intensidades das forças tensoras em cada corda.

→ **RESOLUÇÃO:**

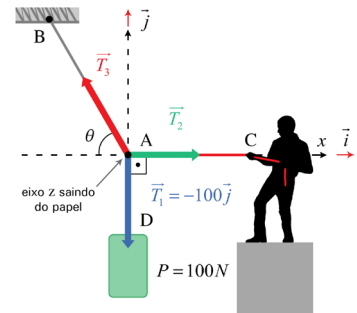
No ponto de equilíbrio A, atuam 3 forças tensoras conforme o DCL (Diagrama de forças) do ponto A.

A força tensora na corda AD é conhecida, pois, estando a caixa em equilíbrio, $T_1 = \text{peso da caixa} = 100\text{ N}$ (essa força “puxa” o ponto A para baixo).

Aplicando $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, determina-se que $\sin\theta = 0,80$.

Estando o ponto A em equilíbrio, escreve-se:

$$\sum \text{Forças}_A = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0 \quad (I)$$



Podemos encontrar a solução por 2 processos: o geométrico e o analítico. **Figura 17.4:** Diagrama do Corpo Livre (DCL) do ponto de equilíbrio A.

1. Processo geométrico

Por este processo desenhamos a “poligonal dos vetores”, isto é, desenha-se a partir de um dos vetores (por exemplo, \vec{T}_1) e os outros em sequência, mantendo a direção relativa entre eles. A **Figura 17.5** mostra o resultado. Como se fechou o polígono, a resultante é nula.

No caso de um sistema de 3 forças em equilíbrio, o método da poligonal sempre resulta num triângulo.

Consequência: Quando a soma vetorial de 3 forças for nula, elas devem, necessariamente, pertencer a um mesmo plano, ou seja, são coplanares. Por outro lado, se

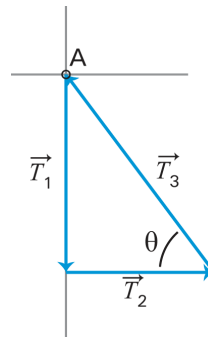


Figura 17.5: Estando o ponto A em equilíbrio, a soma vetorial das forças é nula; como consequência, a poligonal dos vetores é fechada, ou seja, a extremidade do último vetor da poligonal coincide com a origem do primeiro.

3 forças não coplanares atuarem em um ponto, este ponto jamais poderá estar em equilíbrio. Resolvendo-se, geometricamente, o triângulo resultante no processo da poligonal, determinam-se os seus lados, que representam as intensidades das forças. Nesse caso, temos um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é T_3 (a ser determinado) e cujos catetos são $T_1 = P = 100 \text{ N}$ e T_2 (a ser determinado). Aplicando as relações métricas ao triângulo retângulo da **Figura 17.5**, escrevemos:

$$\tan\theta = T_1/T_2 \rightarrow T_2 = T_1/\tan\theta.$$

Como $\tan\theta = \text{sen}\theta/\text{cos}\theta = 0,8/0,6 = 4/3$, temos $T_2 = (100 \text{ N})/(4/3) = 75 \text{ N}$.

Portanto, $T_2 = 75 \text{ N}$ é a intensidade da força com que o operador puxa a corda.

Para determinar T_3 (a hipotenusa), aplicamos o Teorema de Pitágoras, ou seja, $T_3^2 = T_1^2 + T_2^2$. Assim,

$$T_3 = \sqrt{(100 \text{ N})^2 + (75 \text{ N})^2} = 125 \text{ N}$$

Portanto, $T_3 = 125 \text{ N}$ é a intensidade da força tensora que atua ao longo da corda AB.

2. Processo analítico

Este método utiliza as componentes cartesianas dos vetores.

Se $\sum \text{Forças}_A = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = \mathbf{0}$, então, a soma das componentes, ao longo de seus respectivos eixos cartesianos, também se iguala a zero, ou seja,

$$\sum \vec{T}_x = \vec{T}_{1x} + \vec{T}_{2x} + \vec{T}_{3x} = 0 \quad \text{(II)}$$

$$\sum \vec{T}_y = \vec{T}_{1y} + \vec{T}_{2y} + \vec{T}_{3y} = 0 \quad \text{(III)}$$

$$\sum \vec{T}_z = \vec{T}_{1z} + \vec{T}_{2z} + \vec{T}_{3z} = 0 \quad \text{(IV)}$$

Nesse caso, como as forças são coplanares, e considerando que elas pertençam ao plano Oxy, a relação (IV) deve ser desprezada. A **Figura 17.6** ilustra as componentes dessas forças.

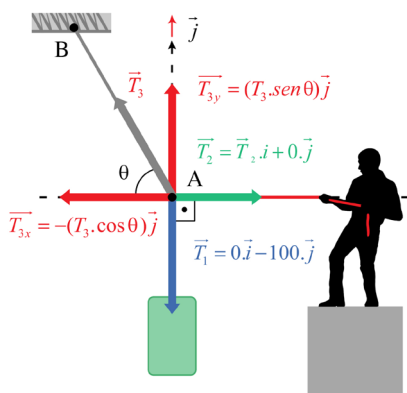


Figura 17.6: A força T_1 é a própria componente no eixo y e a força T_2 é a própria componente no eixo x. A força T_3 tem componentes T_{3x} e T_{3y} , não nulas.

A tabela sintetiza as componentes das forças:

Forças	\vec{i} (componente no eixo x)	\vec{j} (componente no eixo y)
\vec{T}_1	0	-100
\vec{T}_2	T_2	0
\vec{T}_3	$-T_3 \cos\theta = -0,6.T_3$	$T_3 \text{sen}\theta = 0,8.T_3$

No equilíbrio, temos:

$$\sum \vec{T}_x = 0 \rightarrow 0 + T_2 - 0,6T_3 = 0 \therefore T_2 = 0,6T_3 \tag{V}$$

$$\sum \vec{T}_y = 0 \rightarrow -100 + 0 + 0,8T_3 = 0 \therefore T_3 = 125 \text{ N} \tag{VI}$$

Substituindo-se (VI) em (V) obtém-se: $T_2 = 75 \text{ N}$.

Portanto, as forças que atuam no ponto A com resultante nula são:

Forças	\vec{i}	\vec{j}	Módulo, localização
\vec{T}_1	0	-100	100 N, $\varphi = 270^\circ$
\vec{T}_2	+75	0	75 N, $\varphi = 0^\circ$
\vec{T}_3	-75	+100	125 N, $\varphi = 127^\circ$

onde φ é o ângulo trigonométrico medido positivamente no sentido anti-horário a partir do eixo x positivo, de acordo com os seguintes diagramas:

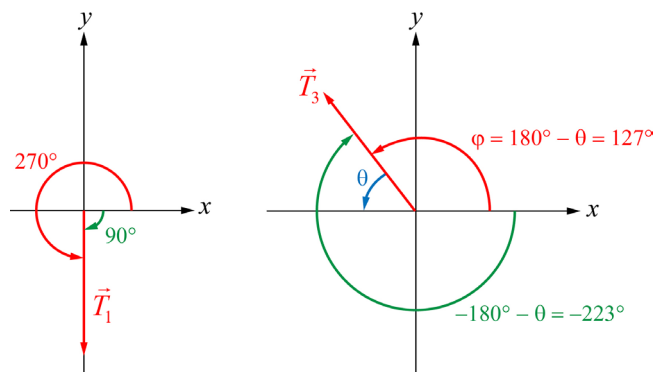


Figura 17.7: Ângulos que indicam a posição de T_1 e T_3 .

O ângulo θ foi dado, a saber, $\cos\theta = 0,6 \rightarrow \theta = \arccos(0,6) \cong 53^\circ$



17.3 Equilíbrio do corpo rígido: Translações

Definimos corpo rígido como aquele para o qual a distância entre dois pontos quaisquer sobre ele se mantém constante, independentemente das circunstâncias. Dessa forma, um corpo rígido pode exibir dois tipos de movimento. Primeiramente, temos um movimento de translação de todo o corpo rígido, que é analisado considerando-se um ponto especial do corpo rígido, conhecido como **centro de massa** ou **centro de gravidade**.

Dizemos que um corpo rígido está em equilíbrio, do ponto de vista de deslocamentos do corpo todo, ou seja, do seu centro de massa, se a somatória das forças que atuam sobre o corpo for nula, isto é:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

onde \vec{F}_i representa a i -ésima força agindo sobre o corpo rígido. Em componentes, escrevemos:

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \dots + F_{nx} = 0$$

$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots + F_{ny} = 0$$

$$F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \dots + F_{nz} = 0$$

A condição acima é equivalente a não haver deslocamentos do centro de massa do corpo rígido. Isso é equivalente a não haver deslocamentos do corpo rígido.

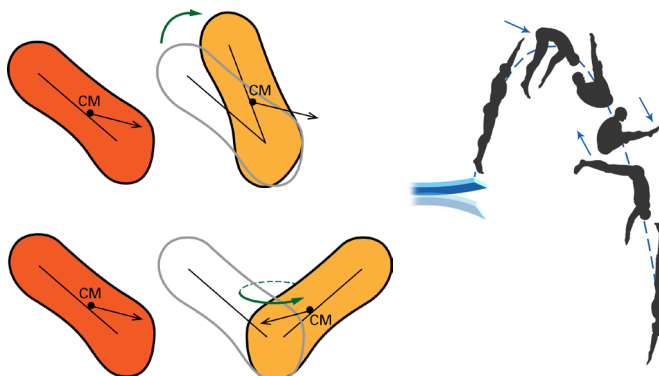


Figura 17.8: Um corpo rígido pode se deslocar por inteiro e, ao mesmo tempo, experimentar um movimento de rotação.

17.3.1 O Centro de Massa ou Centro de Gravidade

O centro de massa de uma distribuição de massas é um ponto localizado sobre essa distribuição (às vezes fora dela) e dotado de uma propriedade especial.

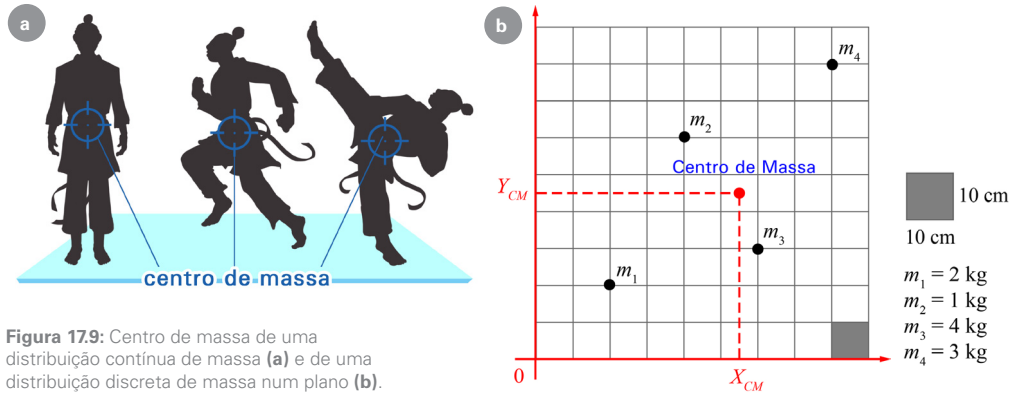


Figura 17.9: Centro de massa de uma distribuição contínua de massa (a) e de uma distribuição discreta de massa num plano (b).

Embora seja, em geral, muito difícil determinar a posição e a velocidade de qualquer uma das partículas de um sistema, existe um ponto cujo movimento, em um bom número de casos, é previsível. Esse ponto é o centro de massa. O centro de massa é definido pelas suas coordenadas R_x , R_y , e R_z , dadas pelas expressões:

$$R_x = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i = \frac{1}{M} (m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_N x_N)$$

$$R_y = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i = \frac{1}{M} (m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_N y_N)$$

$$R_z = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i = \frac{1}{M} (m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_N z_N)$$

onde M é a massa total do sistema de partículas

$$M = \sum_{i=1}^N m_i = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_N$$

Podemos assim escrever, vetorialmente, que o vetor de posição \vec{R} do centro de massa é dado por

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i$$



• EXEMPLO 02

A **Figura 17.10** ilustra um sistema de 8 partículas localizadas nos vértices de um cubo de aresta $a = 20$ cm e cujas massas estão expressas na figura.

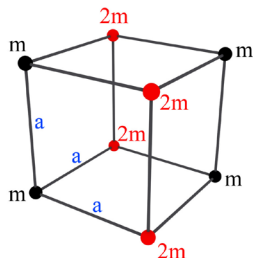


Figura 17.10: Partículas distribuídas nos vértices de um cubo de aresta a .

Determinar as coordenadas cartesianas do respectivo CM (centro de massa).

→ RESOLUÇÃO

Adotemos um sistema de referência cartesiano conforme ilustra a **Figura 17.11**.

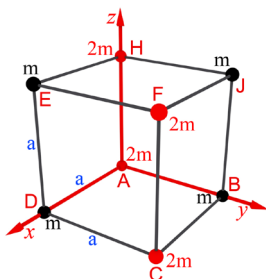


Figura 17.11: Sistema de referência cartesiano xyz adotado para o posicionamento das partículas A, B, C, D, E, F, J, H.

A tabela a seguir mostra as partículas, com seus respectivos posicionamentos e produtos $m_i x_i$, $m_i y_i$ e $m_i z_i$.

Partícula (x_i, y_i, z_i)	massa	$m_i x_i$	$m_i y_i$	$m_i z_i$
A(0, 0, 0)	$2m$	0	0	0
B(0, a , 0)	m	0	$m \cdot a$	0
C(a , a , 0)	$2m$	$2m \cdot a$	$2m \cdot a$	0
D(a , 0, 0)	m	$m \cdot a$	0	0
E(a , 0, a)	m	$m \cdot a$	0	$m \cdot a$
F(a , a , a)	$2m$	$2m \cdot a$	$2m \cdot a$	$2m \cdot a$
J(0, a , a)	m	0	$m \cdot a$	$m \cdot a$
H(0, 0, a)	$2m$	0	0	$2m \cdot a$
Somatória	$12m$	$6m \cdot a$	$6m \cdot a$	$6m \cdot a$

Da tabela, extraímos:

$$\sum m_i = 12 \cdot m;$$

$$\sum m_i x_i = 6m \cdot a \rightarrow R_x = \frac{6m \cdot a}{12m} = 0,5a$$

$$\sum m_i y_i = 6m \cdot a \rightarrow R_y = \frac{6m \cdot a}{12m} = 0,5a$$

$$\sum m_i z_i = 6m \cdot a \rightarrow R_z = \frac{6m \cdot a}{12m} = 0,5a$$

Em resumo: sendo $a = 20$ cm, o centro de massa do sistema encontra-se no ponto de coordenadas (10 cm; 10 cm; 10 cm); de outra forma: o centro de massa do sistema é definido pelo vetor posição $\vec{R} = 10\vec{i} + 10\vec{j} + 10\vec{k}$ (cm).



No caso de um sistema composto por um número muito grande de partículas, é preferível tratá-lo como uma distribuição contínua de partículas e não como uma distribuição discreta, conforme vimos no Exemplo 02. Nesse caso, um dos conceitos mais relevantes é a densidade.

Considere uma massa dm contida num volume dV , conforme ilustra a **Figura 17.12**.

A densidade de massa é definida como a razão entre a quantidade de massa dm e o elemento infinitesimal de volume dV que contém essa massa. Definimos, portanto,

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dm(\vec{r})}{dV}$$

onde \vec{r} é o vetor posição do elemento de volume dV .

Dada a densidade volumétrica de massa, podemos calcular a massa total utilizando a integral de volume da densidade

$$M = \iiint \rho(\vec{r}) dV$$

Para uma distribuição contínua de massa, o centro de massa é dado por

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \iiint \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$$

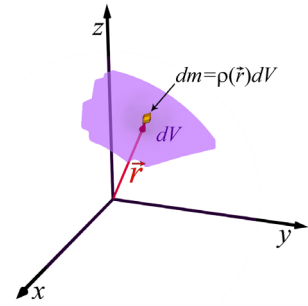


Figura 17.12: Elemento de massa dm contido num elemento de volume dV , cuja posição é definida pelo vetor posição \vec{r} .

O movimento do centro de massa é bastante simples se considerarmos o conceito de momento linear.

Define-se **momento linear** ou **quantidade de movimento linear** de uma massa m que se move com velocidade \vec{v} como a grandeza vetorial $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$.
O módulo do momento linear é $p = m \cdot v$ e a sua unidade de medida no SI é **kg.m/s** (sem nome específico).

Para especificar melhor o movimento do centro de massa, notamos primeiramente que $\sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i = M \frac{d\vec{R}}{dt}$ e, portanto, a taxa de variação do vetor posição do centro de massa vezes a massa total é igual ao momento linear total

$$\vec{P} = M \frac{d\vec{R}}{dt}$$

Assim, podemos escrever: $M \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1} \vec{F}_{\text{ext}}^{(i)}$.

O que o distingue dos demais pontos é o centro de massa movimentar-se como se todas as forças externas estivessem atuando sobre ele. Não é assim muito difícil determinar a posição do centro de massa de um sistema de partículas e prever seu movimento. Esse é o caso quando o corpo rígido fica sujeito apenas à força gravitacional. Tudo se passa como se toda a força gravitacional estivesse aplicada nesse ponto, daí resultando que esse ponto se torna o centro de gravidade do corpo.

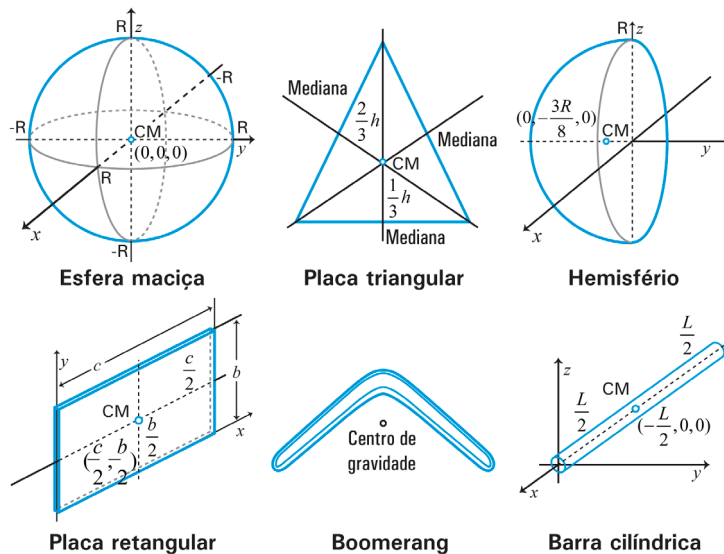


Figura 17.13: Centro de gravidade de alguns sólidos homogêneos, ponto onde se considera aplicada a força gravitacional sobre o sólido.



• EXEMPLO 03

Como determinar o centro de massa (ou centro de gravidade) de uma placa de formato irregular, conforme ilustra a **Figura 17.14**?



Figura 17.14: Onde se localiza o centro de massa desta placa de formato irregular?

→ RESOLUÇÃO:

Em objetos de formato regular como, por exemplo, uma placa retangular homogênea, a posição do centro de massa (ou centro de gravidade) pode ser inferida mediante o conceito de “simetria”.

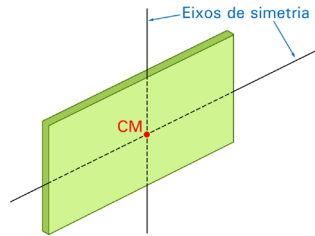


Figura 17.15: No caso de objetos de formatos regulares e com distribuição de massa homogênea, o centro de massa pertence a eixos de simetria. A interseção de dois eixos de simetria determina o ponto do centro de massa.

No caso em questão, a placa, apesar de ser homogênea, tem formato irregular; portanto, não possui eixos de simetria evidentes.



Como sabemos que a força gravitacional (peso) sobre a placa é uma força aplicada no CM (ou CG), se, mediante um fio, a pendurarmos por um ponto A, no equilíbrio a vertical que passa pelo ponto A também passa pelo CM. Se a pendurarmos por outro ponto B, a vertical por esse ponto também passa pelo CM. Logo, se desenharmos na placa as duas “verticais”, o ponto comum (intersecção das “verticais”) será o CM procurado. Veja a **Figura 17.16**.

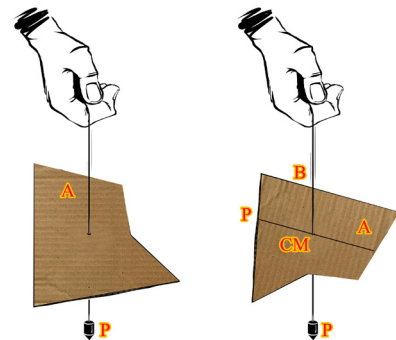


Figura 17.16: A placa é pendurada primeiramente pelo ponto A e, depois, pelo ponto B. As verticais obtidas pelo fio de prumo passam pelo CM da placa. O CM é a intersecção desses dois segmentos de reta.

17.4 Equilíbrio do corpo rígido: Rotações

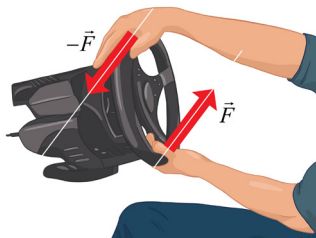


Figura 17.17: Sistema binário de força aplicado no volante de um carro. Esse sistema produz rotação no volante; nesse caso, rotação horária, mirando o volante do topo.

Finalmente, devemos considerar o movimento de rotação do corpo rígido. Esse tipo de movimento é independente do anterior. Um exemplo dessa situação é um sistema de duas forças paralelas aplicadas a um corpo de forma que tenham módulos e direções iguais, mas sentidos contrários. Se as duas forças forem aplicadas em pontos distintos sobre o corpo, ele não se deslocará, mas se colocará em movimento de rotação. Tal sistema de forças é conhecido como um sistema binário. No caso do sistema binário, o corpo rígido se coloca em rotação como resultado não nulo das duas forças em sentidos opostos.

Para analisar o efeito de um conjunto de forças agindo sobre um corpo, no sentido de provocar rotações ou não, devemos considerar os torques provocados por tais forças.

Considere a **Figura 17.18**. A placa figurada pode girar ao redor do eixo Oz . Por meio de um fio, paralelo ao plano da peça, aplica-se uma força \vec{F} no pino B; a ação da força tende a girar a peça ao redor do eixo Oz . A grandeza relacionada com a rotação dos sólidos é o **torque**.

O torque $\vec{\tau}$ de uma força \vec{F} , aplicada num ponto B de um sólido, é definido como o produto vetorial $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, onde \vec{r} é o vetor posição de B em relação ao ponto O (ponto em que o eixo de rotação Oz “fura” perpendicularmente o plano definido pelos vetores \vec{F} e \vec{r}).

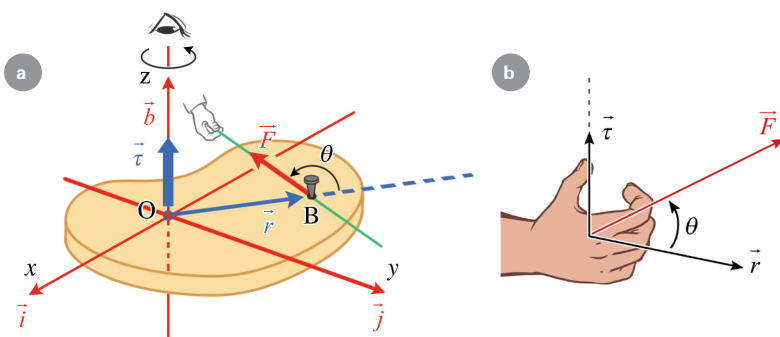


Figura 17.18: (a) O torque é representado pelo vetor $\vec{\tau}$, que é perpendicular ao plano definido pelos vetores \vec{r} e \vec{F} . (b) Pela regra da mão direita, determina-se o sentido de $\vec{\tau}$; para tanto, desenham-se \vec{r} e \vec{F} a partir de um ponto comum; os dedos rebatem \vec{r} contra \vec{F} e o polegar indica o sentido do torque $\vec{\tau}$. Se o torque for no sentido positivo do eixo Oz , o giro será no sentido anti-horário (olhando contra o eixo z positivo) e, caso contrário, o giro será no sentido horário.

O módulo do torque é o escalar $\tau = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \theta$ com $0 \leq \theta \leq \pi$. Observa-se que, quando $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ (180°), não há torque, ou seja, quando \vec{r} e \vec{F} forem paralelos ou antiparalelos entre si, o torque é nulo.

Unidade de medida de torque: $\tau = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \text{sen } \theta$

No Sistema Internacional de Unidades (SI): $[\tau] = \text{metro} \cdot \text{newton} \cdot 1 = \text{m} \cdot \text{N}$

Portanto, a unidade de medida de torque, no SI, é N.m (sem nome especial).



• EXEMPLO 04

Uma peça metálica articulada em O está sujeita a três forças pertencentes ao plano Oxy, conforme indicadas na **Figura 17.19**.

A tabela resume as informações das forças e dos vetores posição em relação ao eixo Oz, que passa pela origem do referencial, dos pontos de aplicação de cada força.

$\vec{F}_1 = -100\vec{i} \text{ (N)}$	$\vec{r}_1 = -0,2\vec{i} + 0,3\vec{j} \text{ (m)}$
$\vec{F}_2 = -75\vec{j} \text{ (N)}$	$\vec{r}_2 = 0,4\vec{i} - 0,2\vec{j} \text{ (m)}$
$\vec{F}_3 = F_{3x}\vec{i} + F_{3y}\vec{j} \text{ (N)}$	$\vec{r}_3 = 0$

Calcular o torque de cada força em relação ao polo O.

→ RESOLUÇÃO:

a. Torque de \vec{F}_1

Dois maneiras analíticas de se calcular o torque. A 1ª será por meio do desenvolvimento do produto vetorial: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \vec{\tau} &= \vec{r} \times \vec{F} = \\
 &= (-0,2\vec{i} + 0,3\vec{j}) \times (-100\vec{i}) \\
 &= (-0,2\vec{i}) \times (-100\vec{i}) + (0,3\vec{j}) \times (-100\vec{i}) \\
 &= (-0,2)(-100)(\vec{i} \times \vec{i}) + (0,3)(-100)(\vec{j} \times \vec{i}) = 20(\vec{i} \times \vec{i}) - 30(\vec{j} \times \vec{i}) \\
 &= 20(\vec{i} \times \vec{i}) + 30(\vec{i} \times \vec{j}) \\
 &= 20(0) + 30(\vec{k})
 \end{aligned}$$

que resulta:

$$\vec{\tau}_1 = +30 \cdot \vec{k}$$

Características do vetor torque $\vec{\tau}_1$

- Módulo: $\tau_1 = 30 \text{ N.m}$;
- Direção: eixo Oz
- Sentido: positivo do eixo Oz, ou seja, um vetor “saindo do plano do papel”.

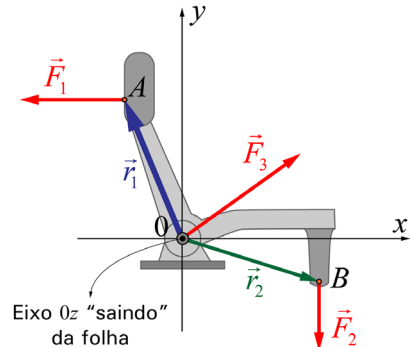


Figura 17.19: A peça metálica é articulada em O e está sujeita ao sistema de forças coplanares \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 .

Sentido de giro do torque

Outra forma de caracterizar o torque é pelo sentido de “giro” que ele produz em relação ao eixo de rotação (que, neste caso, é o eixo Oz). Para isso, usa-se a mão direita: o polegar na direção do eixo de rotação (neste caso, o eixo Oz) e os outros dedos giram seguindo a direção da força. O resultado, neste caso, é um giro anti-horário. **Resumindo:** o torque da força F_1 em relação ao eixo Oz tende a girar o objeto no sentido anti-horário.

b. Torque de \vec{F}_2

Outra forma analítica de se calcular o produto vetorial é por meio do seguinte determinante:

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_{2,x} & r_{2,y} & r_{2,z} \\ F_{2,x} & F_{2,y} & F_{2,z} \end{vmatrix}$$

Vamos escrever as expressões cartesianas completas dos vetores:

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= 0 \cdot \vec{i} - 75\vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \\ \vec{r}_2 &= 0,4\vec{i} - 0,2\vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

Substituindo as componentes na matriz e resolvendo:

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_2 &= \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,4 & -0,2 & 0 \\ 0 & -75 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \begin{vmatrix} -0,2 & 0 \\ -75 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0,4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 0,4 & -0,2 \\ 0 & -75 \end{vmatrix} \\ \vec{\tau}_2 &= \vec{i} [(-0,2 \times 0) - (-75 \times 0)] - \vec{j} [(0,4 \times 0) - (0 \times 0)] + \vec{k} [(0,4 \times (-75)) - (-0,2 \times 0)] \\ \vec{\tau}_2 &= \vec{i} [(0) - (0)] - \vec{j} [(0) - (0)] + \vec{k} [(-30) - (0)] \\ \vec{\tau}_2 &= \vec{i} [0] - \vec{j} [0] + \vec{k} [-30] = -30 \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

Características do vetor torque $\vec{\tau}_2$

- Módulo: $\tau_2 = 30 \text{ N.m}$
- Direção: eixo Oz
- Sentido: negativo do eixo Oz, ou seja, um vetor “penetrando no plano do papel” (ou tendendo a girar o objeto no sentido horário)

c. Torque de $\vec{F}_3 = 0$, pois $\vec{r}_3 = 0$

Torque e o conceito de braço da força ou braço de alavanca

A Figura 17.20 ilustra o braço B_F de uma força \vec{F} em relação ao polo O (ou eixo de rotação) em relação ao qual a peça ilustrada pode girar.

Em relação ao polo O, o torque é $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ e o seu módulo é $\tau = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \text{sen}\theta$. Mas, conforme ilustrado na Figura 17.20, $B_F = |\vec{r}| \cdot \text{sen}\theta$, o que nos permite escrever:

$$\tau = B_F \cdot |\vec{F}| = B_F F$$

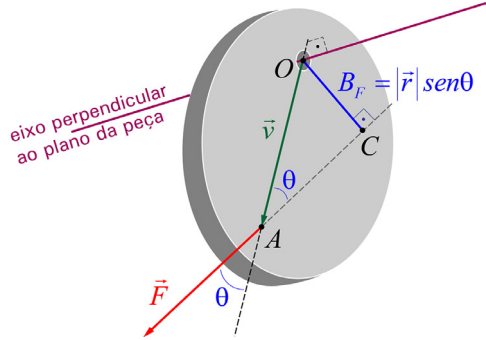


Figura 17.20: O braço B_F da força é a distância do eixo de rotação por O até a "linha de ação" da força F ; portanto, o segmento de reta OC é perpendicular tanto à linha tracejada AC quanto ao eixo de rotação.

Conclusão:

- O módulo do torque pode ser calculado como se fosse o produto da intensidade da força pelo seu respectivo braço em relação ao polo de rotação.
- O sentido de rotação que o torque pode produzir ao redor do eixo pelo polo O será horário ou anti-horário (o que pode ser determinado pelo uso do dedo polegar da mão direita (direção do eixo) e os outros dedos no sentido da força (o que determina o sentido de rotação)).
- Sinal algébrico dos torques: quando os torques forem calculados utilizando-se o conceito de braço de força, devemos adotar um sinal algébrico para os giros (que podem ser 2 em relação a um eixo). Se adotarmos o sinal (+) para o torque que tende a girar o corpo no sentido anti-horário, os torques opostos devem acolher sinais algébricos (-) ou vice-versa.

• EXEMPLO 05

Vamos considerar a mesma situação do Exemplo 04, porém, agora tendo como conhecidos os braços das forças, conforme ilustrado na Figura 17.21.

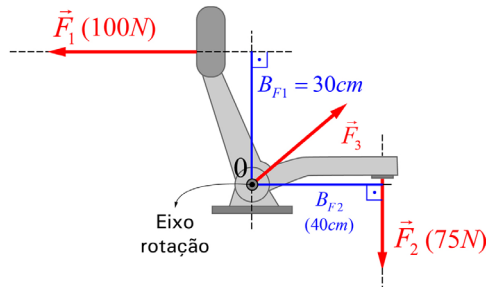


Figura 17.21: Em relação ao polo O, o braço de \vec{F}_1 é $B_{F1} = 30$ cm e o de \vec{F}_2 é $B_{F2} = 40$ cm. O braço de \vec{F}_3 é $B_{F3} = 0$, pois a sua linha de ação passa por O.

Calcule os módulos e o sentido de giro dos torques das forças envolvidas.

→ RESOLUÇÃO:

Vamos adotar como positivos os torques anti-horários em relação ao eixo de rotação que passa pelo polo O. Assim:

- Torque de \vec{F}_1

$$\tau_{F_1} = \mp B_{F_1} \cdot F_1 = \mp 30 \text{ cm} \cdot 100 \text{ N} = \mp 3.000 \text{ N} \cdot \text{cm} = \mp 30 \text{ N} \cdot \text{cm}.$$

Escolha do sinal: como \vec{F}_1 tende a girar o corpo no sentido anti-horário, o sinal a ser adotado é +. Logo, $\tau_{F_1} = + 30 \text{ N} \cdot \text{m}$

- Torque de \vec{F}_2

$$\tau_{F_2} = \mp B_{F_2} \cdot F_2 = \mp 40 \text{ cm} \cdot 75 \text{ N} = \mp 30 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Escolha do sinal: como \vec{F}_2 tende a girar o corpo no sentido horário, o sinal a ser adotado é -. Logo, $\tau_{F_2} = -30 \text{ N} \cdot \text{m}$.

- Torque de \vec{F}_3

$$\tau_{F_3} = \mp B_{F_3} \cdot F_3 = 0 \quad (\text{pois } B_{F_3} = 0)$$

Torque total e o equilíbrio de rotação de um sólido

Quando, sobre um corpo rígido, atuam várias forças, devemos considerar o torque total, definido por $\vec{\tau} = \sum_{i=1}^N \vec{\tau}_i$, onde $\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$.

A condição para que um corpo rígido se apresente em equilíbrio de rotação (ou seja, que não exiba movimento de rotação ou, se existir, a rotação será uniforme, como a da Terra ao longo de sua órbita ao redor do Sol), é a de que a soma dos torques sobre o corpo rígido seja nula:

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^N \vec{\tau}_i = 0$$

Assim, se nenhum torque for aplicado ao corpo, ele permanecerá estável quanto às rotações.

No caso geral, o problema do equilíbrio de um corpo rígido é sempre resolvido a partir de um conjunto de 6 equações. Essas equações envolvem as componentes dos torques e das forças aplicadas. Sendo N o conjunto de forças aplicadas ao corpo, podemos escrever primeiramente para as forças:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N F_{ix} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N F_{iy} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N F_{iz} &= 0 \end{aligned}$$

onde F_{ix} , F_{iy} e F_{iz} são, respectivamente, as componentes x , y e z da i -ésima força, enquanto para

as componentes dos torques vale:

$$\sum_{i=1}^N \tau_{ix} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \tau_{iy} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \tau_{iz} = 0$$

onde τ_{ix} , τ_{iy} , τ_{iz} são, respectivamente, as componentes x , y e z do torque aplicado ao corpo pela i -ésima força.

• EXEMPLO 06

A figura ilustra a força $\vec{F}_B = F_B \vec{j}$ exercida pelo bíceps contraído no ponto B do antebraço. Um sistema de referência xyz foi desenhado de modo que o eixo $0z$ “saia” do plano do papel. O peso do antebraço tem intensidade 20 N e é localizado no centro de gravidade CG_{antebr} ; a bola, com centro de gravidade CG_{bola} , tem peso de intensidade 50 N.

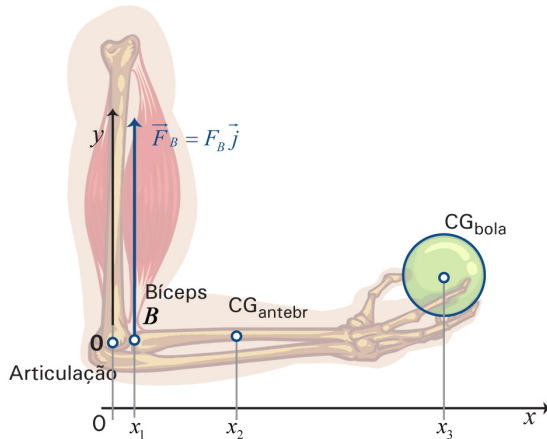


Figura 17.22: Esquema da força do bíceps sobre o antebraço.

Se $x_1 = 4,5 \text{ cm}$; $x_2 = 15 \text{ cm}$ e $x_3 = 30 \text{ cm}$, calcule F_B e a reação na articulação \vec{R}_0 .

→ RESOLUÇÃO:

Esta situação **não** trata de forças concentradas numa partícula. Trata-se de um sistema de forças distribuídas ao longo de um corpo extenso. Este corpo extenso é o **antebraço** que, para simplificar a análise, iremos considerar como uma **alavanca** com ponto de apoio em 0 (articulação) e, nela, esquematizar as forças (ou seja, esquematizar o DCL da alavanca).

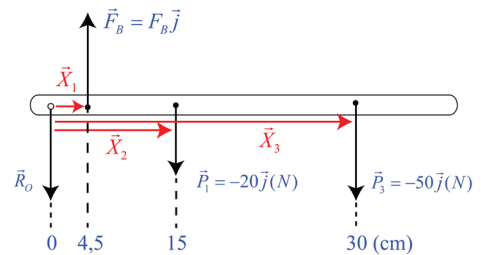


Figura 17.23: Modelo da alavanca para o antebraço.

Os vetores $\vec{x}_1 = 4,5\vec{i}$; $\vec{x}_2 = 15\vec{i}$ e $\vec{x}_3 = 30\vec{i}$ (em cm) representam os vetores posição dos pontos de aplicação de cada força na alavanca em relação à origem 0 (articulação do antebraço, neste caso).

A situação em análise é uma situação **estática**, ou seja, uma situação na qual a aceleração resultante do sistema é $\vec{a} = 0$. Portanto, de acordo com a **2ª Lei de Newton**, podemos escrever:

$$\sum_1^4 \vec{F}_i = m \cdot \vec{a} = 0 \text{ ou } \vec{R}_0 + F_B \vec{j} + (-20\vec{j}) + (-50\vec{j}) = 0 \quad (\text{VII})$$

Temos duas incógnitas (R_0 e F_B). Precisamos de outra relação entre as incógnitas. Essa relação será

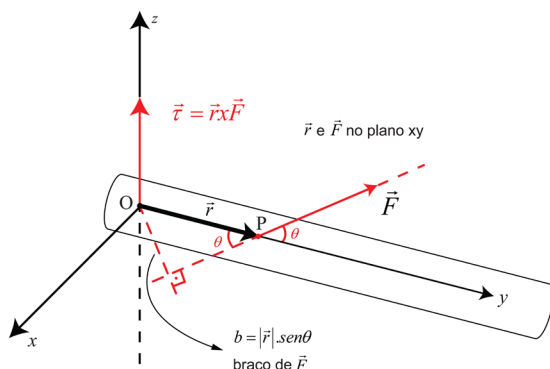


Figura 1724: Detalhe do “braço” da força em relação ao eixo de rotação.

No caso de forças cujas direções (linhas de ação) pertencem a um mesmo plano, os torques dessas forças serão vetores perpendiculares ao plano. Em relação a um eixo de rotação perpendicular ao plano, alguns torques serão no sentido horário e outros no sentido anti-horário. Se a soma dos torques no sentido horário suplantar a soma dos torques no sentido anti-horário, o objeto sujeito às forças será dotado de uma aceleração angular no sentido horário e vice-versa. No caso analisado, no entanto, o objeto está em equilíbrio e destituído do movimento de rotação.

Calculando os torques:

Os produtos vetoriais (ver **Vetores**) dos vetores cartesianos $(\vec{i} \times \vec{i}) = (\vec{j} \times \vec{j}) = (\vec{k} \times \vec{k}) = 0$ e $(\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{k}$; $(\vec{j} \times \vec{k}) = \vec{i}$; $(\vec{k} \times \vec{i}) = \vec{j}$ serão utilizados nos cálculos dos torques.

- $\vec{\tau}_{\vec{F}_B} = \vec{x}_1 \times \vec{F}_B = (4,5)\vec{i} \times (F_B)\vec{j} = (4,5)(F_B)(\vec{i} \times \vec{j}) = (4,5)F_B\vec{k} \text{ (N} \cdot \text{cm)}$
- $\vec{\tau}_{\vec{P}_1} = \vec{x}_2 \times \vec{P}_1 = (15)\vec{i} \times (-20)\vec{j} = (-300)(\vec{i} \times \vec{j}) = (-300)\vec{k} \text{ (N} \cdot \text{cm)}$
- $\vec{\tau}_{\vec{P}_3} = \vec{x}_3 \times \vec{P}_3 = (30)\vec{i} \times (-50)\vec{j} = (-1500)(\vec{i} \times \vec{j}) = (-1500)\vec{k} \text{ (N} \cdot \text{cm)}$
- $\vec{\tau}_{\vec{R}_0} = 0$ (pois **seu** respectivo vetor posição $\vec{x}_{R_0} = 0$)

Como o sistema se encontra estático,

$$\sum \tau_{s/alavanca} = (4,5F_B - 300 - 1500)\vec{k} = 0 \quad (\text{VIII})$$

De (VIII), determinamos $F_B = \frac{1800 \text{ N} \cdot \text{cm}}{4,5 \text{ cm}} = 400 \text{ N}$ (vertical para cima), que, substituído em (VII),

determinamos $\vec{R}_0 = -330\vec{j}$ ou $R_0 = 330 \text{ N}$ (vertical para baixo).

• EXEMPLO 07: Grua ou guindaste

A que distância o operador de uma grua deve colocar o contrapeso móvel de 10 toneladas se quiser deslocar com segurança uma carga de massa de 2 toneladas, elevada a partir de um ponto que dista 2 metros da base da torre?

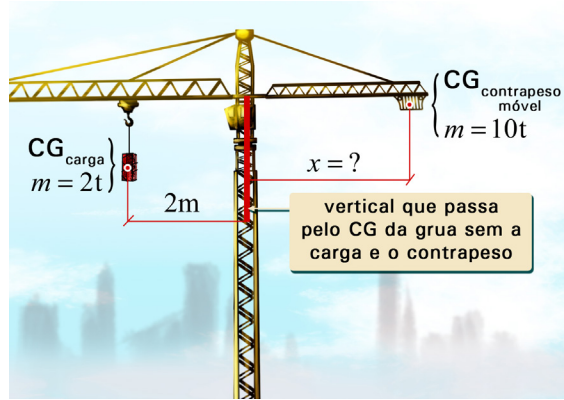


Figura 17.25: Equilíbrio entre a carga e o contrapeso móvel numa grua.

→ RESOLUÇÃO:

A grua é um instrumento mediante o qual podemos elevar e movimentar cargas, acondicionadas em contêineres, por exemplo, e materiais pesados de maneira geral.

Antes da operação, posicionam-se contrapesos fixos na parte da estrutura horizontal da grua, de modo que o CG do sistema se localize na vertical que passe ao longo da estrutura vertical da grua, conforme ilustra a Figura 17.26.

Desse modo, para o estudo do equilíbrio, vamos considerar apenas as forças decorrentes da carga e do contrapeso móvel na estrutura horizontal, como ilustra a Figura 17.26.

Na situação de equilíbrio, escreve-se:

1º $\sum \text{Forças} = 0$, ou seja,

$$\vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \rightarrow F\vec{j} - (M_1g)\vec{j} - (M_2g)\vec{j} = 0$$

Portanto, $F = (M_1g) + (M_2g) = (M_1 + M_2)g = 120 \cdot 10^3$ newtons (considerando $g = 10$ N/kg)

2º $\sum \text{Torques} = 0$, ou seja, $\vec{\tau}_{\vec{F}} + \vec{\tau}_{\vec{F}_1} + \vec{\tau}_{\vec{F}_2} = 0$ (em relação a qualquer polo ou eixo).

Escolhendo-se o ponto O como os polos dos torques, temos $\vec{\tau}_{\vec{F}} = 0$ (pois \vec{F} é aplicado em O e, portanto, o respectivo vetor posição é nulo e, conseqüentemente, o torque também é nulo).

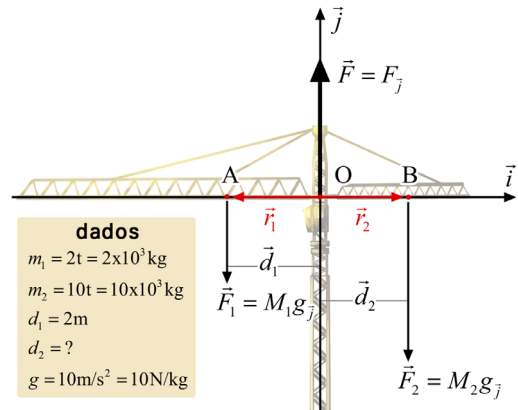


Figura 17.26: DCL da estrutura horizontal da grua; como os pesos da carga e do contrapeso móvel, \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , são verticais, a reação \vec{F} da estrutura vertical sobre a estrutura horizontal é vertical.

Resta então:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\tau}_{\vec{F}_1} + \vec{\tau}_{\vec{F}_2} &= \mathbf{0} \\ \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \vec{r}_1 &= -(d_1)\vec{i} \\ \vec{r}_2 &= +(d_2)\vec{i} \\ \vec{F}_1 &= -(M_1g)\vec{j} \\ \vec{F}_2 &= -(M_2g)\vec{j} \end{aligned}$$

Temos:

$$-(d_1)\vec{i} \times [(-M_1g)]\vec{j} + (d_2)\vec{i} \times [(-M_2g)]\vec{j} = \mathbf{0}$$

$$d_1M_1g[\vec{i} \times \vec{j}] - d_2M_2g[\vec{i} \times \vec{j}] = \mathbf{0}, \text{ como } \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$d_1M_1g[\vec{k}] - d_2M_2g[\vec{k}] = \mathbf{0}, \text{ como } [\vec{k}] \neq \mathbf{0}, \text{ resulta:}$$

$$M_1gd_1 - M_2gd_2 = 0$$

Donde inferimos que a distância onde devemos situar o contrapeso é dada por:

$$d_2 = \frac{M_1}{M_2}d_1 = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ kg}}{10 \cdot 10^3 \text{ kg}} \cdot 2 \text{ m} = 0,4 \text{ m} = 40 \text{ cm}$$



17.5 Máquinas simples

Desde priscas eras, os seres humanos têm procurado desenvolver máquinas e instrumentos voltados para facilitar o desenvolvimento das suas múltiplas atividades.

Alguns antropólogos estabelecem, como marco na transição entre os seres mais primitivos dos quais eventualmente descendemos - os hominídeos - para o *Homo sapiens*, o desenvolvimento de máquinas, as quais denominamos hoje máquinas simples. A primeira máquina de que se tem notícia foi algo análogo ao que chamamos hoje de machadinha. As máquinas simples ou compostas obtidas a partir da cunha recebem o nome de instrumentos Acheulianos. Inicia-se com essa descoberta a fase em que o homem adquire a capacidade de interferir no meio ambiente. De fato, a descoberta desses instrumentos - as máquinas simples - permitiu ao ser humano fazer uma transição na sua forma de interagir com outros animais e interferir na natureza.

Máquinas simples são instrumentos que nos permitem mudar tanto a direção como também o módulo de uma força aplicada. O conceito mais importante nesse contexto é o da vantagem mecânica, que está associado à multiplicação da força aplicada mediante o uso da máquina.

Podemos analisar algumas máquinas simples à luz de três elementos:

17.5.1 Força motriz ou força potente

É definida como toda força capaz de produzir movimento. É a força que aciona a máquina simples. Em geral, é essa força que aplicamos a uma das partes de uma máquina simples como a alavanca. Será designada por \vec{F}_M .

17.5.2 Força resistente

É toda força que se opõe ao movimento que seria induzido pela força motriz. É aquela que queremos vencer ou contrabalançar ao aplicarmos a força motriz. Será designada por \vec{F}_R .

17.5.3 Elemento de ligação

É uma estrutura que permite a interação entre \vec{F}_M (força potente) e \vec{F}_R (força resistente), que pode ser um ponto fixo, um eixo ou um plano.

De acordo com as definições acima, a vantagem mecânica, V_m , de uma máquina simples será aqui estabelecida como a relação entre o módulo da força resistente e o da força motriz:

$$V_m = \frac{F_R}{F_M}$$

A grande vantagem do uso das máquinas simples reside no fato de podermos reduzir a força aplicada (F_M) com o intuito de mover um objeto. O custo disso, no entanto, é a distância percorrida pelo ponto de aplicação de \vec{F}_M , que vamos chamar de d_M , ser maior do que d_R , a respectiva distância percorrida pelo ponto de aplicação de \vec{F}_R .

O estudo das máquinas simples é importante porque os princípios sobre os quais repousa sua construção se aplicam a todas as máquinas. É nesse sentido que procuraremos analisar algumas máquinas simples compostas, ou seja, compostas pelas máquinas simples clássicas.

De fato, tendo em vista as suas múltiplas aplicações, as máquinas simples foram estudadas e analisadas ao longo de mais de três séculos. Seu uso, por outro lado, vem de épocas imemoriais e nunca terá fim.

17.6 Tipos básicos de máquinas simples

Adotaremos a classificação de máquinas simples utilizada desde o período da Renascença. Essa é uma definição clássica. Ela considera máquina simples como aquela que é composta de apenas uma peça. Elas são:



Figura 17.27: Exemplos de máquinas simples.

Hoje em dia ampliamos tal definição para incorporar máquinas compostas a partir das máquinas simples clássicas. Assim, a tesoura, o alicate, a pinça e o machado, por exemplo, são máquinas compostas.

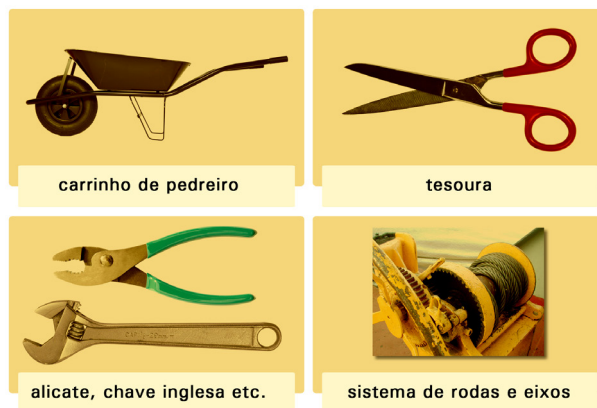


Figura 17.28: Alguns exemplos de máquinas compostas de máquinas simples.

As máquinas simples podem ser divididas em duas categorias.

- Na primeira categoria, devemos fazer a análise do funcionamento delas em termos de forças e, sob esse aspecto, é essencial que efetuemos a decomposição das forças. O parafuso, a cunha e o plano inclinado pertencem a esse primeiro grupo.
- Na segunda categoria, encontramos aquelas para as quais a análise se baseia no equilíbrio mediante a ação de torques (a roldana, a alavanca e a roda). Analisaremos apenas essas últimas.

17.6.1 Alavanca

Alavanca é um corpo rígido, sólido, de forma alongada (relativamente fina, como uma haste) e que, quando apoiada num ponto, denominado fulcro, pode ser colocada em rotação em torno desse ponto.

Em qualquer alavanca, devemos considerar além das forças motriz e resistente, já definidas, os seguintes elementos:

- O elemento de ligação, no caso da alavanca, é um ponto conhecido como **fulcro**.
- Definimos o braço resistente B_R como a distância do fulcro até a reta suporte do vetor \vec{F}_R , ou seja, até a “linha de ação da força resistente”. Essa distância é também denominada “braço da força resistente”. Analogamente, definimos o braço motor ou potente (B_M) como a distância entre “a linha de ação da força motriz” (F_M) e o fulcro, conforme ilustração na **Figura 17.29**.

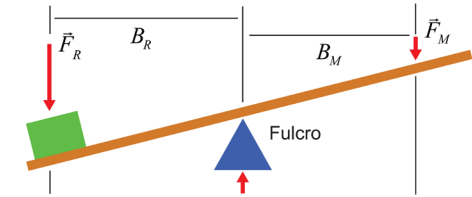


Figura 17.29: As forças motriz (F_M) e resistente (F_R) e os respectivos “braços” B_F e B_R em relação ao fulcro.

Levando-se em conta a posição relativa do ponto de apoio em relação aos pontos nos quais estão aplicadas as demais forças, podemos classificar as alavancas em três categorias.

17.6.1.1 Interfixa

É aquela em que o fulcro se situa entre os pontos nos quais as demais forças estão aplicadas.

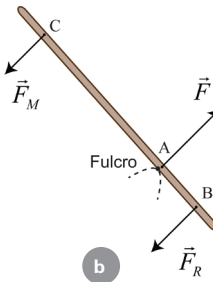
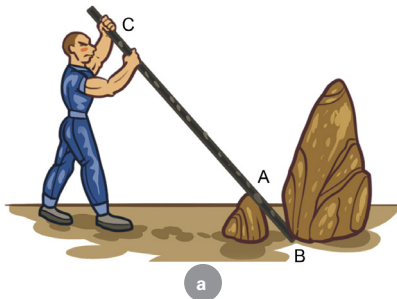


Figura 17.30: (a) O operador puxa a alavanca interfixa com a intenção de mover uma pedra robusta. (b) O DCL da alavanca. O fulcro A situa-se entre a força motriz (F_M) aplicada pelo operador em C e a força (F_R) em B (esta força é a reação à força que a alavanca aplica na pedra no ponto B).

17.6.1.2 Inter-resistente

Quando a força resistente é aplicada num ponto situado entre o ponto de apoio e o ponto no qual a força motriz é aplicada.

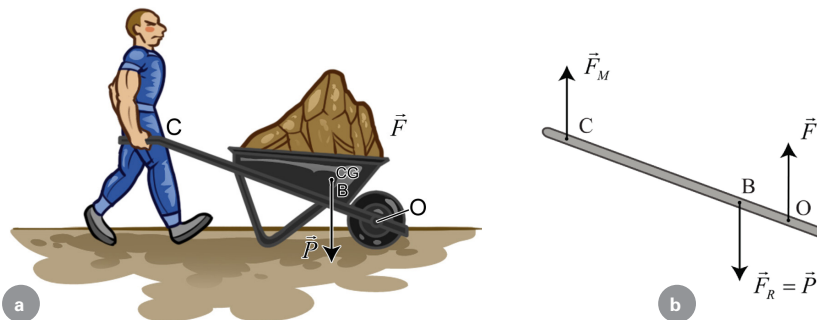


Figura 17.31: (a) O carrinho de pedreiro se reduz a uma alavanca inter-resistente, conforme se pode notar em (b), o respectivo DCL. A força \vec{F}_M é a força aplicada pelo operador no ponto C da alavanca; o ponto O é o fulcro e representa o eixo da roda, sobre o qual a alavanca se apoia; este eixo é empurrado para baixo devido à carga do carrinho e \vec{F} é a força de reação do eixo sobre a alavanca. Em (b) representa-se a força que o peso da carga exerce sobre a alavanca. É a força resistente \vec{F}_R a ser vencida pela máquina simples em tela.

17.6.1.3 Interpotente

Refere-se ao caso em que a força motriz é aplicada num ponto situado entre o ponto de apoio e o ponto no qual a força resistente é aplicada.

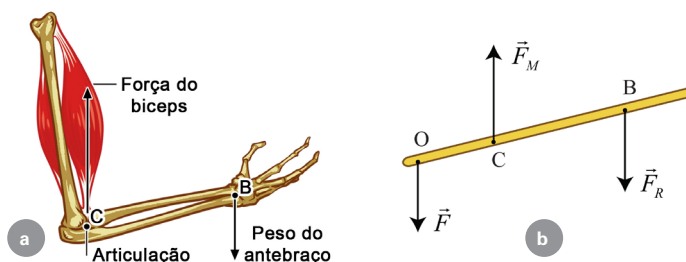


Figura 17.32: (a) O antebraço é mantido na posição indicada pela ação da força do biceps no ponto C. A carga a ser suportada é o peso do antebraço que se aplica no CG. O sistema funciona como uma alavanca interpotente. Em (b) temos o DCL da alavanca (antebraço reduzido a uma alavanca), onde \vec{F}_M é a força do biceps e \vec{F}_R é o peso do antebraço (a resistência a ser vencida).

Essa mesma classificação se aplica às máquinas simples compostas por duas alavancas. Assim, a tesoura (composta por duas alavancas) e a gangorra fazem uso de alavancas interfisas.

O abridor de tampas de garrafa e o carrinho de mão são exemplos de alavancas inter-resistentes.

A pinça (composta por duas alavancas) e o braço humano fazem uso de alavancas interpotentes.

17.6.1.4 Condições de equilíbrio das alavancas

Levando-se em conta as condições de equilíbrio em uma alavanca, o produto da força potente pelo seu braço deve ser igual ao produto da força resistente pelo seu braço. De acordo com a notação já introduzida, escrevemos:

$$F_R B_R = F_M B_M$$

E, portanto, a vantagem mecânica de uma alavanca é dada pela relação entre os braços, ou seja:

$$V_m = \frac{F_R}{F_M} = \frac{B_M}{B_R}$$

E ela pode ser (em princípio) tão grande quanto quisermos. É com base nesse argumento que Arquimedes afirma que até mesmo mover o mundo seria possível.



• **EXEMPLO 08**

Na **Figura 17.33**, a carga total do carrinho é de 600 N.

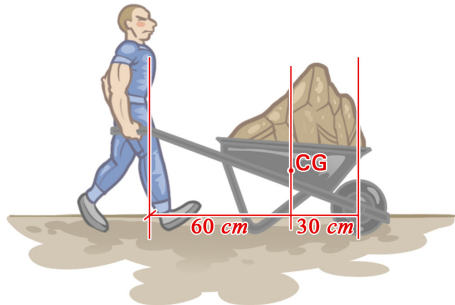


Figura 17.33: Carrinho de pedreiro com carga total de 600 N; as distâncias entre as verticais que passam pelo eixo da roda, pelo CG do carrinho e pelo ponto de aplicação da força do operador são mencionadas na figura.

- a. Qual a força que o operador exerce sobre o carrinho?
- b. Qual a vantagem mecânica do sistema?

→ **RESOLUÇÃO:**

O carrinho de pedreiro pode ser analisado como uma alavanca inter-resistente, conforme visto antes. O DCL do carrinho é dado pela **Figura 17.34**.

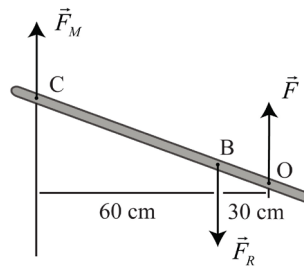


Figura 17.34: DCL do carrinho, reduzido a uma alavanca inter-resistente. Em relação ao fulcro O, o braço de \vec{F}_M é $B_M = 90$ cm.

a. Admitindo-se uma situação de equilíbrio estático, temos: $\sum \text{torques} = 0 \rightarrow \bar{\tau}_{F_M} + \bar{\tau}_{F_R} + \bar{\tau}_F = 0$. Esta soma vale para qualquer polo em relação ao qual calculamos os torques. Vamos adotar o polo O (fulcro), pois desse modo eliminamos uma incógnita, que é a força F . Assim:

i. $\tau_{F_M} = \mp F_M \cdot B_M = \mp (F_M)(90 \text{ cm}) = -(90 \text{ cm}) \cdot F_M$. F_M [escolhemos o sinal (-) pelo fato de o giro ser no sentido horário em relação ao fulcro].

ii. $\tau_{F_R} = \mp F_R \cdot B_R = \mp (600 \text{ N})(30 \text{ cm}) = +1800 \text{ N} \cdot \text{cm}$ [escolhemos o sinal (+) pelo fato de este torque ser no sentido anti-horário].

iii. $\tau_F = 0$

Logo, $-(90 \text{ cm}) \cdot F_M + 1800 \text{ N cm} = 0$; donde $F_M = 200 \text{ N}$.

b. A vantagem mecânica é $V_M = \frac{F_R}{F_M} = \frac{600 \text{ N}}{200 \text{ N}} = 3$; uma outra forma de determinar a vantagem mecânica é: $V_M = \frac{B_M}{B_R} = \frac{90 \text{ cm}}{30 \text{ cm}} = 3$.

A vantagem mecânica é ausente de unidades físicas, pois resulta de uma relação de grandezas de mesma espécie. O significado da vantagem mecânica: quantas vezes a força resistente é maior do que a força potente ou, ao contrário, quantas vezes a força motriz é menor do que a força resistente.



17.6.2 Roldanas

A rigor, uma roldana nada mais é do que uma roda que gira ao redor de um eixo passando pelo centro dela. Essa roda deve ser dotada de um sulco para que por ele passemos um cabo flexível ou uma corda (como é mais usual).

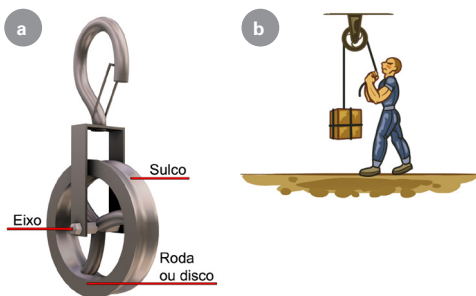


Figura 17.35: (a) Características principais de uma polia móvel ou roldana. (b) Polia móvel em operação: erguer a carga puxando o fio para baixo é mais cômodo do que erguê-la puxando-a diretamente para cima.

A roldana ou polia é outra máquina simples bastante antiga. O uso de apenas uma roldana facilita a realização de tarefas por uma questão apenas de ergonomia (ou um aspecto anatômico). Uma roldana muda a direção de uma força aplicada por um ângulo de até 180° . A força necessária para elevar um objeto é a mesma, mas elevá-lo usando a roldana é mais cômodo. Viabiliza a realização da tarefa, pois fica mais fácil realizá-la. Assim, a rigor, dispêndemos mais energia do que se o elevássemos com as próprias mãos.

As roldanas podem ser utilizadas de três formas distintas. Uma roldana é dita fixa se seu eixo é fixo a um suporte, ou seja, ela pode estar presa ao teto, por exemplo. Ela pode estar livre. Nesse caso, ela acompanha a carga que se quer elevar. Finalmente, podemos compor arranjos envolvendo muitas roldanas. Nesse último caso, ainda podemos falar de máquinas simples, mas seria mais adequado falar de máquinas simples compostas.

No caso de uma roldana fixa, ela funciona como uma alavanca interfixa de braços iguais. Nesse caso, a vantagem mecânica é igual a 1 (Figura 17.36).

Diríamos que, nesse caso, **não há vantagem mecânica**. O trabalho realizado para elevar o objeto de uma distância d , é $W = P.d$, exatamente igual ao trabalho realizado pela força peso. Nessa nova posição, o objeto ganha energia potencial a expensas da energia despendida pelo operador da máquina.

A roldana móvel funciona como uma alavanca inter-resistente. Nesse caso, a vantagem mecânica é igual a dois, desprezando-se o atrito e o momento de inércia da roldana. De qualquer forma, empregamos uma força menor para elevar um objeto a partir do chão.

Analisando o equilíbrio da polia móvel, podemos concluir que:

$$2T = 2F_M = F_R; \text{ donde: } F_M = \frac{F_R}{2} \text{ e, portanto, a } V_{M(\text{polia móvel})} = 2.$$

O uso de várias polias permite-nos aplicar uma força menor do que a requerida para levantar uma carga relativamente pesada. Por exemplo, se usarmos uma combinação de uma polia móvel juntamente com outra fixa, como mostra a Figura 17.37, a força necessária será, desprezando-se o peso da polia móvel, igual à metade do peso a ser erguido. O deslocamento, agora medido pela “quantidade” de corda que puxamos, será o dobro do deslocamento da massa que deslocamos, ou seja, o trabalho é o mesmo que o feito com apenas uma polia, por exemplo.

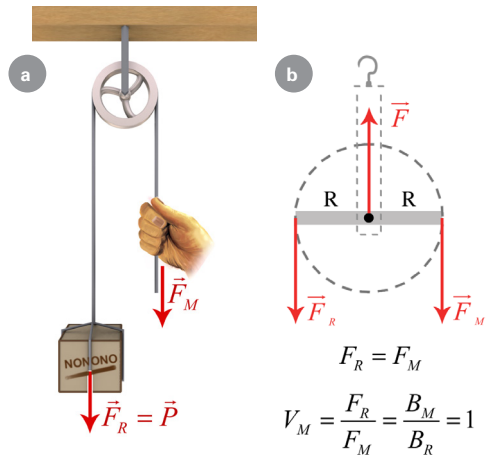


Figura 17.36: (a) Carga sendo erguida por meio de uma polia fixa. (b) DCL da polia reduzida a uma “alavanca interfixa”. Na situação de equilíbrio, a força tensora no fio tem módulo constante $F_M = F_R = \text{peso } P$ da carga.

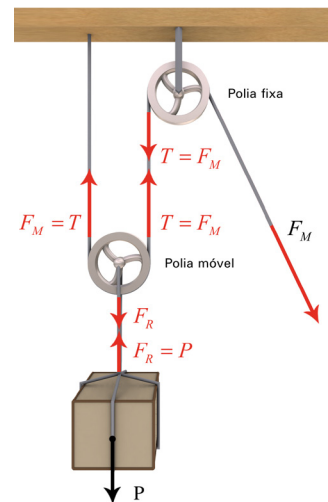


Figura 17.37: Polia móvel acionada mediante uma polia fixa, que apenas muda a direção de ação da força motriz F_M , mas não influi na sua intensidade. A força tensora no fio que passa pelas polias é $T = F_M$.

Podemos associar três, quatro ou mais polias para facilitar ainda mais o levantamento de objetos a partir do solo. Nesse caso, estamos falando de máquinas simples compostas.

17.6.3 Roda e Eixo

Afirma-se que uma das maiores descobertas da história da humanidade tenha sido a Roda. Certamente, isso é válido para a Antiguidade. Uma das suas funções é eliminar, ao máximo, a força de atrito com o solo, que dificulta tremendamente o trabalho quando se arrasta um corpo (não redondo) sobre o solo. Provavelmente, ela terá sido derivada do rolete, que são troncos arredondados de árvores, que facilitam o transporte de objetos a longas distâncias, como requerido no antigo Egito.

Podemos combinar rodas e roletes, formando, com isso, várias outras máquinas simples. Uma roda com um eixo pode ser pensada como uma segunda roda (ou rolete) presa ao centro da primeira roda. Muitas vezes, é essa combinação que é apresentada como máquina simples. A combinação de uma roda e um eixo pode ser pensada como uma alavanca modificada, a qual gira em torno de um ponto central, agora considerado como o fulcro da roda eixo. O sarilho e a roda d'água são versões dessa máquina.



Figura 17.38: Sarilho usado para erguer balde com água do interior de uma cisterna com água.

Na versão do sarilho aplica-se uma força F_M , por meio do uso de uma manopla, a uma distância R do centro (o raio da roda grande). Com esse arranjo, podemos erguer um balde de peso P (a força resistente, F_R), preso a uma corda enrolada sobre um eixo de raio r . Nesse caso, continua valendo uma relação análoga à alavanca, ou seja, a vantagem mecânica ideal é dada pela relação dos raios:

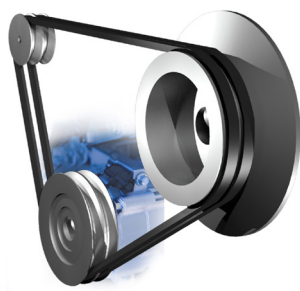


Figura 17.39: Polias fixas (roda e eixo) acopladas por correias, encontradas em motores de veículos automotores.

$$V_m = \frac{F_R}{F_M} = \frac{R}{r}$$

As rodas podem ser combinadas em um mesmo eixo e/ou em eixos paralelos e acopladas por meio de correias. Tais combinações de rodas são voltadas para a redução ou para o aumento da velocidade angular da rotação de um determinado dispositivo, ou para alterar a sua direção.

17.6.4 Engrenagens

As engrenagens (rodas dentadas) são máquinas simples, compostas e voltadas para a redução ou para o aumento da velocidade angular da rotação de um determinado dispositivo, ou para alterar a sua direção. Grosso modo, uma engrenagem é um conjunto de rodas dentadas que se acoplam de alguma maneira.

As **Figuras 17.40 e 17.41** exemplificam alguns desses dispositivos.

A justificativa mais comum para a utilização das engrenagens é a de que nem sempre um dispositivo (uma máquina, por exemplo) tem sua velocidade adequada para funcionamento igual ao do dispositivo que o colocou em movimento (um motor, por exemplo). Digamos que um motor, impulsionado por um conjunto de pistões, coloque um girabrequim para funcionar com uma velocidade de rotação de 1.000 rpm, mas a máquina que ele pretende acionar só funciona bem se acionada a 250 rpm.

Para reduzir a velocidade angular por um fator 4, basta acoplar as engrenagens de maneira que, enquanto um dá 4 voltas, a outra dê apenas uma volta. Isso se consegue fazendo com que uma das rodas tenha quatro vezes mais dentes do que a outra.

Usualmente, construímos um sistema de duas engrenagens formando um conjunto único. Pode-se, assim, transmitir a energia proporcional provida por um motor para uma máquina. Às vezes, no entanto, não é conveniente ter as engrenagens ligadas entre si diretamente. Nesse caso, pode-se fazer uso de correntes ou correias.

Numa bicicleta com marchas, existem várias combinações de rodas dentadas com número adequado de dentes, que podem ser acessadas usando uma alavanca disponível no guidão.



Figura 17.40: Engrenagem cônica. Diferencial de carros.



Figura 17.41: Sistema de engrenagem em uma bicicleta de marcha única. A engrenagem de acionamento é denominada “coroa” e a acoplada à roda traseira é conhecida como “catraca”.

○○○○○

- EXEMPLO 09

O sistema de transmissão de movimento de uma bicicleta de marcha única é composto de duas rodas dentadas acopladas por uma correia dentada:

- A “coroa” é acionada pelos pés do ciclista.
- A “catraca” gira mediante a correia dentada acoplada à coroa.

Considere uma bicicleta com coroa de 48 dentes; catraca com 16 dentes e um sistema roda-pneu de 63,7 cm de diâmetro externo.

Se o ciclista acionar a coroa com frequência $f = 3$ rps (rotações por segundo), qual a frequência de rotação da “catraca”?

→ RESOLUÇÃO

O sistema “coroa - correia dentada - catraca” transmite a potência mecânica dos pés do ciclista ao eixo da roda de tração e assim acelera e mantém a velocidade de uma bicicleta.

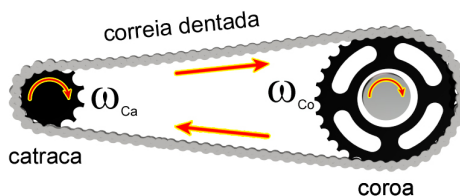


Figura 1742: Sistema coroa-catraca em uma bicicleta de marcha única.

A relação entre os números de dentes da coroa e da catraca identifica a relação da transmissão de movimento. A coroa tem 48 dentes ($C_o = 48$) e a catraca tem 16 dentes ($C_a = 16$). A cada volta da coroa, a catraca realiza 3 voltas [a relação de transmissão é de 1:3]. A frequência de rotação também guarda a mesma relação, ou seja, a frequência da coroa é $f_{C_o} = 3$ rps; então, a frequência da catraca será de $f_{C_a} = 9$ rps. O mesmo ocorre com as velocidades angulares: $\omega_{C_o} = 2\pi f_{C_o} = 6\pi$ rad/s e $\omega_{C_a} = 2\pi f_{C_a} = 18\pi$ rad/s.

